

## MATEMATIKA BSC ZÁRÓVIZSGA TEMATIKA

### PTE TTK, Matematikai és Informatikai Intézet

#### 1. Matematikai alapok I.

Halmazok és kijelentések: Halmazok, műveletek halmazokkal. Halmazok számossága, megszámlálható halmazok. Kijelentések, predikátumok, kvantorok. Következtetési sémák, a következtetések helyességének eldöntése.

#### 2. Matematikai alapok II.

Relációk és függvények: Relációk, ekvivalencia relációk, kapcsolat a halmazok osztályozásaival, rendezési relációk. Függvények: A függvény, mint speciális reláció. Injektív, szürjektív, bijektív függvények és ezek jellemzése. Függvények kompozíciója és inverze.

#### 3. Számelmélet I.

Oszthatóság, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös az egész számok gyűrűjében. Euklideszi osztás és algoritmus. Prímszámok, a számelmélet alaptétele.

#### 4. Számelmélet II.

Kongruenciák és maradékosztályok. Az Euler, Fermat és Wilson tételek. Lineáris és kongruenciák. Lineáris diofantoszi egyenletek. Számelméleti függvények.

#### 5. Lineáris algebra

A vektor geometriai fogalma, műveletek vektorokkal, koordináták. A test feletti vektortér fogalma, altér, lineáris függetlenség és függőség, generátorrendszer, bázis, dimenzió. Mátrixok, mátrixműveletek. Determinánsok és tulajdonságaik. Lineáris egyenletrendszerek. Cramer-szabály. Lineáris leképezések.

#### 6. Algebrai struktúrák I.

Félcsoportok és csoportok. Részcsoportok, csoportmorfizmusok. Mellékosztályok, Lagrange tétele, homomorfizmustétel. Permutációcsoportok.

#### 7. Algebrai struktúrák II.

Gyűrűk és testek. Részgyűrűk, résztestek, morfizmusok, karakterisztika. Ideálok. Polinomgyűrűk, a maradékos osztás tétele, irreducibilis polinomok. Az algebra alaptétele. Valós és komplex együtthatós polinomok és egyenletek.

#### 8. Numerikus sorozatok és sorok

Sorozatok: korlátosság, monotonitás, konvergencia és ezek kapcsolatára vonatkozó tételek. Sorok: konvergencia, abszolút konvergencia és ezek kapcsolata. Pozitív tagú sorok, Leibniz-típusú sorok. Konvergencia kritériumok. Nevezetes sorozatok és sorok. Sorok Cauchy szorzata. Cauchy szorzat konvergenciájára vonatkozó tételek.

#### 9. Hatványsorok, függvények határértéke, folytonossága

Hatványsorok konvergencia tartománya és összegfüggvénye. Az összegfüggvény folytonosságára, differenciálhatóságára és integrálhatóságára vonatkozó tételek. Elemi

függvények definíciója: az  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  függvények és tulajdonságaik. A valós leszűkítések grafikus képei és tulajdonságai.

Valós változós valós értékű függvények határértéke. Átviteli elv. Két függvény összegfüggvényének, szorzatának, hányadosának és összetettjének határértéke. Nevezetes határértékek. Határérték-számítási eljárások. Folytonos függvények és tulajdonságaik.

#### 10. Differenciálszámítás

Valós változós valós értékű függvények differenciálhatósága: differenciálhányados, differenciál, geometriai jelentés. A differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata. Összeg, szorzat, hányados, összetett és inverz függvény differenciálhatósága. A L'Hospital szabály. Monotonitás, szélsőérték, konvexitás vizsgálata deriváltak segítségével. Függvényvizsgálat.

#### 11. Integrálszámítás I, differenciálegyenletek

Primitív függvények. Primitív függvények műveleti tulajdonságai. Primitív függvénnyel rendelkező függvényosztályok. Parciális integrálás. Integrálás helyettesítéssel. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása.

#### 12. Integrálszámítás II.

A határozott integrál fogalma. Integrálható függvényosztályok, integrálfüggvény. Newton-Leibniz tétel. Síkidomok területének, görbe ívhosszának, forgástestek térfogatának és felszínének számítása integrál segítségével.

#### 13. Többváltozós függvények.

Többváltozós függvények határértéke és differenciálhatósága. Derivált mátrix. Parciális deriváltak, iránymenti derivált A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Többváltozós valósértékű függvények szélsőértékének meghatározása. Vonalintegrál. Definíció, úttól való függetlenség. Többszörös integrál definíciója és kiszámítása.

#### 14. A geometria alapjai

Euklideszi geometria különböző axiómarendszerei. Párhuzamossági axióma és ekvivalensei. Hiperbolikus (Bolyai-Lobacsevszkij) geometria, modellek. A gömbi geometria alapjai, gömbháromszögek.

#### 15. Geometriai transzformációk

Egybevágóság, hasonlóság, affin, projektív és topológikus transzformációk. A sík egybevágóságainak előállítása tengelyes tükrözésekből. A tér egybevágósági transzformációi. Inverzió a síkban és a térben, alkalmazások. Háromszögek geometriája, nevezetes pontok, vonalak, körök. Kúpszeletek.

#### 16. Projektív geometria és differenciálgeometria

A projektív sík axiomatikus felépítése, az O-pont modell. Homogén koordináták, a kettősviszony, projektivitások. Desargues tétele. Centrális-axiális kollineációk. Alapvető görbeelméleti fogalmak, Frenet formulák.

#### 17. Kombinatorika

Permutációk, variációk, kombinációk (ismétlés nélkül és ismétléssel). Binomiális együtthatók és tulajdonságaik. A binomiális tétel, szitaformula. Fibonacci-számok, Catalan-számok. Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Euler-vonal, Hamilton-kör.



**18. Valószínűségszámítás**

Kombinatorikus valószínűségi feladatok. Az eseményalgebra fogalma, tulajdonságok. Gyakoriság, relatív gyakoriság, a valószínűség fogalma. Klasszikus valószínűségi mező. Geometriai valószínűség. Feltételes valószínűség. Valószínűségi változó, várható érték, szórás. Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások.

**19. Számelmélet III.** *(csak a szakirány nélküli hallgatóknak)*

Magasabbfokú és másodfokú kongruenciák. Legendre-szimbólum, primitív gyök, diszkrét logaritmus. A  $\pi(x)$  függvényre és az  $n$ -edik prímszámra vonatkozó becslések. A prímek reciprokainak összege.

**20. Komplex függvénytan** *(csak a szakirány nélküli hallgatóknak)*

Holomorf függvények. Cauchy-Riemann feltételek. Komplex integrál. Cauchy-féle integrálformulák. Holomorf függvények hatványsorba fejtése. Laurent sorok.

**21. Valós függvénytan** *(csak a szakirány nélküli hallgatóknak)*

Lebesgue integrál bevezetése. Lebesgue-tétel.  $L^2$  függvénytér, skaláris szorzat. Trigonometrikus rendszer. Trigonometrikus Fourier-sor. Dirichlet-féle magfüggvény. Dini-féle konvergencia-kritérium. Fejér tétele.

**22. Operációkutatás** *(csak a szakirány nélküli hallgatóknak)*

Lineáris programozási feladat. Szimplex algoritmus. Dualitás. Dualitási tételek. Szállítási feladat.

