Számelméleti függvények extremális nagyságrendje

Dr. Tóth László

2006

Bevezetés

Ha számelméleti függvények, pl. multiplikatív vagy additív függvények nagyságrendjét vizsgáljuk, akkor először általában az adott függvény átlagos nagyságrendjét nézzük. Azt mondjuk, hogy f **átlagos nagyságrend**je g, ha

$$\sum_{n\le x} f(n) \sim \sum_{n\le x} g(n),$$

azaz f összegzési függvénye aszimptotikusan egyenlő g összegzési függvényével, ahol g elemi függvényekkel kifejezhető és g-nek ismerjük az aszimptotikus viselkedését.

Tekintsük pl. az $f=\sigma$ függvényt, ahol $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ az n osztóinak összege. Akkor

$$\sum_{n\le x} \sigma(n) \sim \sum_{n\le x} \frac{\pi^2}{6}n,$$

tehát $\sigma(n)$ átlagos nagyságrendje $\frac{\pi^2}{6}n$, azaz ,,átlagosan" n osztóinak száma $\sigma(n)\approx 1,644n$.

Hasonlóan, ha $f=\varphi$ az Euler-függvény: $\varphi(n)=\#\{k: 1\le k\le n, (k,n)=1\}$, akkor ebben az értelemben ,,átlagosan" $\varphi(n)\approx \frac{6}{\pi^2}n \approx 0,607n$.

Az átlagos nagyságrend azonban csak eléggé pontatlan információt szolgáltat a függvény viselkedésére vonatkozóan, nem mutatja ki azokat az értékeket, amelyek nem tipikusak és amelyek ritkán fordulnak elő.

A τ osztófüggvénynek például, ahol $\tau(n)=\sum_{d|n} 1$ az n osztóinak száma, átlagos nagyságrendje $\log n$, ugyanakkor ,,majdnem minden" n-re $\tau(n)\approx (\log n)^{\log 2}\approx (\log n)^{0,693}$, ami a $\log\tau(n)$ normális nagyságrendjére vonatkozó eredményből következik. A $\log n$ átlagos nagyságrendet az az arányaiban kis számú n eredményezi, amelyekre $\tau(n)$ sokkal nagyobb mint $\log n$.

Azt mondjuk, hogy f **normális nagyságrend**je g, ha $\operatorname{limstat}_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=1$ (statisztikus határérték), azaz minden $\varepsilon>0$ esetén $|f(n)-g(n)|<\varepsilon|g(n)|$ egy 1 sűrűségű halmazon.

Ha f nem korlátos multiplikatív függvény és nem az n hatványa, akkor f-nek nem létezik növekvő normális nagyságrendje, lásd B. J. Birch [B], 1967.[1]

A σ és φ függvények

Nézzük a σ és φ függvényet. Ezekre $\sigma(n)\ge n+1, \phi(n)\le n-1$ minden $n\ge 2$-re és az egyenlőségek akkor és csak akkor igazak, ha n prím. Kérdés, hogy $\sigma(n)$ és $\phi(n)$ az n-től függően milyen nagy, illetve milyen kicsi értékeket vehet fel?

[1] Ugyanakkor létezik additív függvények egy széles osztálya, amelyeknek van növekvő normális nagyságrendje.

1. Tétel. Léteznek olyan C_1 és C_2 pozitív állandók, hogy minden $n \geq 2$-re

$$\boxed{\sigma(n) < C_1 n \log n,} \tag{1}$$

$$\boxed{\varphi(n) > C_2 \frac{n}{\log n}.} \tag{2}$$

Választható $C_1 = 3$ és $C_2 = 1/3$.

Bizonyítás. Minden $n \geq 2$ esetén

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < n(1 + \log n) < 3n \log n,$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) \geq \prod_{k=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_k}) \geq \prod_{k=1}^{r} (1 - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{r+1} \geq \frac{1}{2r} \geq \frac{\log 2}{2 \log n} > \frac{1}{3 \log n},$$

ahol p_k a k-adik prím, $r = \omega(n)$ és használtuk, hogy $n \geq 2^r, \log n \geq r \log 2$. $\square$

A C_1 és C_2 konstansok javíthatók ha $n \geq 2$, illetve ha $n \geq n_0$. De ennél lényegesebb kérdés, hogy javíthatók-e az (1)-ben és (2)-ben szereplő $n \log n$ és $n/\log n$ függvények.

Igazoljuk, hogy:

2. Tétel. Léteznek olyan C_3 és C_4 pozitív állandók, hogy minden $n \geq 3$-ra

$$\boxed{\sigma(n) < C_3 n \log \log n,} \tag{3}$$

$$\boxed{\varphi(n) > C_4 \frac{n}{\log \log n}.} \tag{4}$$

$\square$

A (3) és (4) egyenlőtlenségeket egy erősebb eredményből vezetjük le, amelyből az is következik, hogy a jobb oldalon szereplő függvények tovább nem javíthatók.

Maximális és minimális nagyságrend

Bevezetjük a következő fogalmakat:

Definíció. Legyen f egy számelméleti függvény, g pedig egy növekvő függvény, amelyre $g(n) > 0$, ha $n \geq n_0$. Azt mondjuk, hogy f (egy) **maximális** (ill. **minimális**) nagyságrendje g, ha

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \quad \left(\text{ill.} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \right).$$

Itt az első összefüggés például azt jelenti, hogy

i) minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N(\varepsilon)$ úgy, hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$-ra $f(n) < (1+\varepsilon)g(n)$ és

ii) minden $\varepsilon > 0$ esetén $f(n) > (1-\varepsilon)g(n)$ végtelen sok n-re.

A $g(n)$ függvény nem egyértelműen meghatározott, szerepelhet benne egy 1-hez tartó tényező.

A $\sigma(n)$ függvény minimális nagyságrendje n. Ez azonnali, mert $\sigma(n) \geq n, n \geq 1$ és minden p prímre

$$\frac{\sigma(p)}{p} = 1 + \frac{1}{p} \to 1 \qquad (p \to \infty).$$

A $\varphi(n)$ függvény maximális nagyságrendje n. Ez is azonnali, mert $\varphi(n) \leq n, n \geq 1$ és minden p prímre

$$\frac{\varphi(p)}{p} = 1 - \frac{1}{p} \to 1 \qquad (p \to \infty).$$

3. Tétel. (T. H. Grönwall [G], 1913) A $\sigma(n)$ függvény maximális nagyságrendje $e^\gamma n \log\log n$, ahol γ az Euler-állandó. □

4. Tétel. (E. Landau [L], 1903) A $\varphi(n)$ függvény minimális nagyságrendje $e^{-\gamma} n/\log\log n$, ahol γ az Euler-állandó. □

A 3. és 4. Tételek következnek az alábbi eredményből, amely a [TW] cikkben szereplő eredmények speciális esete:

5. Tétel. Legyen $f \geq 0$ egy multiplikatív számelméleti függvény és legyen

$$\rho(p) = \sup_{a \geq 0} f(p^a), \quad \text{ahol } p \text{ prím}, \quad R = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p).$$

Ha

1) minden p prímre $\rho(p) \leq \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1}$ és

2) minden p prímre létezik olyan e_p kitevő, hogy $\log e_p = o(\log p)$ és $f(p^{e_p}) \geq 1 + \frac{1}{p}$, akkor

$$\boxed{\limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{\log\log n} = e^\gamma R,} \tag{5}$$

azaz $f(n)$ maximális nagyságrendje $e^\gamma R \log\log n$.

Bizonyítás. A feltételek miatt $1 + \frac{1}{p} \leq \rho(p) \leq \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1}$, ahonnan $1 - \frac{1}{p^2} \leq \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p) \leq 1$, ezért az R szorzat (abszolút) konvergens.

A bizonyításban nem használjuk a prímszámtételt. Elegendő a $\prod_{p \leq x}(1 - 1/p)^{-1} \sim e^\gamma \log x$, $x \to \infty$, Mertens-képlet és $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ Csebisev-függvényre vonatkozó $\theta(x) \ll x$ összefüggés alkalmazása, amelyek jóval egyszerűbben igazolhatók.

Az $n = \prod p^{a_p}$ számot írjuk fel $n = n_1 n_2$ alakban, ahol $n_1 = \prod_{p \mid n, p \leq \log n} p^{a_p}$ (és n_2-be kerül a többi prímhatvány). Akkor $f(n_1)$ és $f(n_2)$ így becsülhető:

$$f(n_1) = \prod_{p \mid n, p \leq \log n} f(p^{a_p}) \leq \prod_{p \leq \log n} \rho(p) = \prod_{p \leq \log n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \prod_{p \leq \log n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p),$$

ahonnan

$$f(n_1) \leq \big(1 + o(1)\big) e^\gamma R \log\log n, \quad n \to \infty,$$

használva a fenti Mertens-képletet.

Megtehető, hogy az $n = n_1 n_2$ alakban egy $h(n) \to \infty$ növekvő függvényt veszünk $\log n$ helyett, majd belátjuk, hogy $h(n) = \log n$ a megfelelő választás.

Továbbá,

$$f(n_2) = \prod_{p|n, p>\log n} f(p^{a_p}) \le \prod_{p|n, p>\log n} \rho(p) = \prod_{p|n, p>\log n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p) \prod_{p|n,\, p>\log n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \le$$

$$\le \big(1 + o(1)\big)\Big(1 - \frac{1}{\log n}\Big)^{-\omega(n_2)} = \big(1 + o(1)\big)e^{O(1/\log\log n)} = 1 + o(1), \quad n \to \infty,$$

ahol $\omega(n_2)$ az n_2 különböző prímosztóinak a száma és $n \ge n_2 > (\log n)^{\omega(n_2)}$ alapján $\omega(n_2) \le \log n / \log\log n$.

Tehát

$$f(n) \le \big(1 + o(1)\big)e^{\gamma} R \log\log n, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Most nézzük a fordított egyenlőtlenséget, pontosabban azt, hogy a lim sup elérhető. Azt fogjuk belátni, hogy a lim sup legalább $(1-\varepsilon)$-szor annyi mint a tételben szereplő. Adott $\varepsilon > 0$ esetén legyen N olyan nagy, hogy

$$\prod_{p>N} (1 - \frac{1}{p^2}) \ge 1 - \varepsilon,$$

és $p \le N$ esetén válasszuk meg a k_p kitevőket úgy, hogy

$$\prod_{p \le N} f(p^{k_p}) \ge (1 - \varepsilon) \prod_{p \le N} \rho(p)$$

Ha N és k_p fixek, legyen $x \to \infty$ és tekintsük:

$$n(x) = \prod_{p \le N} p^{k_p} \prod_{N<p\le x} p^{e_p}.$$

Akkor

$$f\big(n(x)\big) = \prod_{p \le N} f(p^{k_p}) \prod_{N<p\le x} f(p^{e_p}) \ge (1-\varepsilon) \prod_{p\le N} \rho(p) \prod_{N<p\le x} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) =$$

$$= (1-\varepsilon) \prod_{p\le N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p) \prod_{N<p\le x} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big) \prod_{p \le x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon) \prod_{p} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\rho(p) \prod_{N<p} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big) \prod_{p\le x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon)^2 R(1 + o(1))e^{\gamma} \log x,$$

használva ismét a Mertens-képletet.

Legyen $E(x) = \max_{p\le x} e_p$. Kapjuk, hogy

$$\log n(x) \le \sum_{p\le N} k_p \log p + \sum_{N<p\le x} e_p \log p \le O(1) + E(x) \sum_{p \le x} \log p = O(1) + E(x)\theta(x) \ll xE(x),$$

használva, hogy $\theta(x) \ll x$. A $\log e_p = o(\log p)$ feltételből $\log E(x) = o(\log x)$ következik és kapjuk, hogy

$$\log\log n(x) \le O(1) + \log E(x) + \log x \le (1+2\varepsilon)\log x,$$

ha x elég nagy. Következik, hogy

$$f(n(x)) \ge \frac{(1-\varepsilon)^3}{1+2\varepsilon} Re^{\gamma}\log\log n(x). \tag{7}$$

A (6) és (7) összefüggések alapján a Tétel bizonyított. $\square$

Megjegyzés. A 3. és 4. Tételek a következő alakban is kimondhatók:

$$\max_{n\le x}\sigma(n) \sim e^{\gamma} x\log\log x, \qquad \min_{n\le x}\varphi(n) \sim e^{-\gamma}x/\log\log x.$$

Alkalmazások

1. Ha $f(n) = \sigma(n)/n$, akkor teljesülnek az 5. Tétel feltételei, mert

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^a} < \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \rho(p)$$

minden p prímre és $a \ge 1$-re, innen $R = 1$, továbbá vehető $e_p = 1$, és kapjuk a (3) képletet.

2. Legyen $f(n) = n/\varphi(n)$, akkor

$$\frac{p^a}{\varphi(p^a)} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \rho(p)$$

minden p prímre és $a \ge 1$-re, innen $R = 1$, vehető itt is $e_p = 1$, és kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\varphi(n)\log\log n} = e^{\gamma},$$

ami egyenértékű a (4) képlettel.

3. Más alkalmazások is adhatók, pl. legyen $f(n) = \sigma^{(e)}(n)/n$, ahol $\sigma^{(e)}(n)$ az n exponenciális osztóinak az összege, amely multiplikatív függvény és $\sigma^{(e)}(p^a) = \sum_{d\mid a} p^d$.

Most $\rho(p) = 1 + \frac{1}{p}$, $e_p = 2$ és kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(e)}(n)}{n\log\log n} = \frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}. \tag{8}$$

További megjegyzések

A fentekhez kapcsolódó eredmények:

6. Tétel. (G. Robin [R], 1984)
Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor

$$\boxed{\sigma(n)/n < e^{\gamma}\log\log n, \quad n \ge 5041.} \tag{9}$$

Ha a Riemann-sejtés hamis, akkor

$$\boxed{\sigma(n)/n > e^{\gamma}\log\log n, \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.}} \tag{10}$$

$\square$

A $\sigma(n)\varphi(n) \le n^2$ egyenlőtlenség alapján $\sigma(n)/n \le n/\varphi(n), n \ge 1$. Az $n/\varphi(n)$ értékeire vonatkozik a következő

7. Tétel. (J. L. Nicolas [N], 1983)
Legyen p_k a k-adik prím és $n_k = p_1 p_2 \cdots p_k$.
Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor

$$\boxed{n_k/\varphi(n_k) > e^\gamma \log\log n_k, \quad k \ge 1.} \tag{11}$$

Ha a Riemann-sejtés hamis, akkor (11) végtelen sok k-ra igaz és végtelen sok k-ra hamis. $\square$

A τ függvény minimális nagyságrendje $g(n) = 2$, mert $\tau(n) \ge 2$ minden $n \ge 2$-re és $\tau(p) = 2$ minden p prímre. A τ függvény maximális nagyságrendjére vonatkozik a következő:

8. Tétel. (S. Wigert [W], 1907) A $\log \tau(n)$ függvény maximális nagyságrendje $\frac{\log 2 \log n}{\log\log n}$, azaz

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \tau(n) \log\log n}{\log n} = \log 2.} \tag{12}$$ $\square$

Ez azt jelenti, hogy ha $n \ge N(\varepsilon)$, akkor

$$\tau(n) < \exp((1+\varepsilon)\log 2 \log n/\log\log n) = 2^{(1+\varepsilon)\log n/\log\log n} = n^{(1+\varepsilon)\log 2/\log\log n}$$

és végtelen sok n-re

$$\tau(n) > \exp((1-\varepsilon)\log 2 \log n/\log\log n) = 2^{(1-\varepsilon)\log n/\log\log n} = n^{(1-\varepsilon)\log 2/\log\log n}.$$

A 8. Tételnek általánosítása a következő:

9. Tétel. ([SS], 1975) Legyen f egy pozitív függvény, amelyre $f(n) = O(n^\beta)$, ahol $\beta > 0$ rögzített. Legyen F olyan multiplikatív függvény, amelyre $F(p^a) = f(a)$ minden p^a ($a \ge 1$) prímhatványra. Akkor

$$\boxed{\limsup_{n\to\infty} \frac{\log F(n) \log\log n}{\log n} = \sup_{a\ge 1} \frac{\log f(a)}{a}.} \tag{13}$$

Hivatkozások

[B] B. J. Birch, Multiplicative functions with non-decreasing normal order. J. London Math. Soc., **42** (1967), 149151.

[FS] J. Fabrykowski, M. V. Subbarao, The maximal order and the average order of the multiplicative function $\sigma^{(e)}(n)$, Théorie des nombres (Québec, PQ, 1987), 201-206, de Gruyter (Berlin – New York, 1989).

[G] T. H. Grönwall, Some asymptotic expressions in the theory of numbers, Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1913), 113-122.

[L] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Teubner, Leipzig – Berlin, 1909.

[N] J. -L. Nicolas, Petites valeurs de la fonction d'Euler, J. Number Theory 17 (1983), no. 3, 375-388.

[R] G. Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. Pures Appl. (9) 63 (1984), no. 2, 187213.

[SS] D. Suryanarayana, R. Sita Rama Chandra Rao, On the true maximum order of a class of arithmetical functions, Math. J. Okayama Univ., **17** (1975), 95-101.

[TW] L. Tóth, E. Wirsing, The maximal order of a class of multiplicative arithmetical functions, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 22 (2003), 353-364.

[W] S. Wigert Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, Arkiv. för Math. **3** (1907), 1-9.