

ÖSSZEGEK BECSLÉSE INTEGRÁLLAL

DR. TÓTH LÁSZLÓ egyetemi docens

Pécsi Tudományegyetem

E-mail: ltoth@math.ttk.pte.hu

MatLap (Kolozsvár) 5 (2001), 203-208

Az integrálszámítás és alkalmazásainak tanítása illetve tanulása során gyakran háttérbe kerül az a tény, hogy a határozott integrál segítségével könnyen megbecsülhetünk olyan összegeket, melyeket nem tudunk pontosan meghatározni. Ezek a becslések nagyon fontosak a matematika és az alkalmazott matematika különböző területein.

Ebben a dolgozatban olyan eredményeket mutatok be, melyek könnyen levezethetők integrálszámítási megfontolásokkal. Nem célom a (leg)pontosabb becslések tárgyalása, ezekre csak rövid utalásokat teszek. Az érdeklődő Olvasó figyelmébe ajánlom a dolgozat végén kitűzött feladatokat, melyek megoldhatók az itt szereplő ötletekkel és eredményekkel, valamint az Irodalomjegyzékben felsorolt könyveket, illetve folyóiratcikkeket. Külön kiemelném a "Konkrét matematika" című, nemrég megjelent [5] könyvet.

Tekintsük az

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

összeget, ahol $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény és $n \geq 1$ egy egész szám.

Ha például $f(x) = \sqrt{x}$ vagy $f(x) = \frac{1}{x}$, akkor a megfelelő S_n összeget nem tudjuk pontosan meghatározni (ún. zárt alakra hozni), lásd [9], ugyanakkor könnyen kiszámíthatók az $\int_1^n \sqrt{x} dx$ és $\int_1^n \frac{dx}{x}$ integrálok. Ezekkel pedig jó becslések adhatók az S_n összegekre.

Tegyük fel, hogy f növekvő függvény és $f(x) \geq 0$ minden $x \geq 1$ -re. Akkor $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$ az f grafikonja alatti téglalapok területösszege (1. ábra), ami kisebb vagy egyenlő, mint a szubgrafikon területe, azaz $\int_1^n f(x) dx$.

Ugyanakkor $f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ az f grafikonjára épített téglalapok területösszege (2. ábra), ami nagyobb vagy egyenlő, mint az $\int_1^n f(x) dx$ -szel adott terület.

Így a következő becsléseket kapjuk:

$$(1) \quad f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x) dx,$$

ahonnan

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + R_n(f), \quad f(1) \leq R_n(f) \leq f(n).$$

Az előbbi, a szemléleten alapuló gondolatmenet a következő analitikus formába önthető: Mivel f növekvő függvény, minden $k \leq x \leq k+1$ esetén $f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$, ahonnan

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1),$$

és így

$$\int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1), \end{array} \right.$$

s innen az (1) egyenlőtlenségeket és a (2) becslést kapjuk.

Itt nem használtuk, hogy $f(x) \geq 0$, ha $x \geq 1$, és kimondható a következő eredmény:

1. Tétel. Ha $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy növekvő függvény, akkor minden $n \geq 1$ egész számra

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + R_n(f), \quad f(1) \leq R_n(f) \leq f(n).$$

Alkalmazzuk ezt az $f(x) = x^s$, ahol $s \geq 0$, és az $f(x) = \ln x$ növekvő függvényekre:

2. Tétel. Minden $s \geq 0$ valós szám és $n \geq 1$ egész szám esetén,

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n k^s = \frac{n^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1} + R_n(s), \quad 1 \leq R_n(s) \leq n^s,$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n \ln k = \ln n! = n \ln n - n + 1 + R_n(\ln), \quad 0 \leq R_n(\ln) \leq \ln n.$$

(3)-at felírva a bevezetőben említett $s = \frac{1}{2}$ esetben kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n \sqrt{n} - \frac{2}{3} + R_n\left(\frac{1}{2}\right), \quad 1 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{n},$$

ahonnan azonnal következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3}.$$

A (4) becslés az ún. elemi Stirling képlet, mely jól használható az $n!$ -ra vonatkozó problémákban. Megjegyzem, hogy érvényes az alábbi pontosabb becslés is, az ún. Stirling-képlet, melynek bizonyítása jóval több munkát igényel, lásd pl. [2], 480. old., [3], 37. old.; [7], I. kötet, 408. old.:

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + M_n, \quad 0 < M_n < \frac{1}{12n}.$$

Nézzük most azt az esetet, mikor f csökkenő függvény. Hogyan módosul ekkor az 1. Tételben adott becslés? Megismételve csökkenő függvény esetén a bevezetőben leírtakat kapjuk, hogy

3. Tétel. Ha $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy csökkenő függvény, akkor minden $n \geq 1$ egész számra

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)dx + T_n(f), \quad f(n) \leq T_n(f) \leq f(1).$$

Más bizonyítás. Ha $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ csökkenő, akkor $-f$ növekvő függvény és erre alkalmazva az 1. Tételt:

$$\sum_{k=1}^n (-f(k)) = \int_1^n (-f(x))dx + R_n(-f), \quad -f(1) \leq R_n(-f) \leq -f(n),$$

ahonnan

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)dx - R_n(-f), \quad f(1) \geq -R_n(-f) \geq f(n).$$

Legyen most $-R_n(-f) = T_n(f)$ és készen is vagyunk.

Pontosabb eredményt kapunk a következő Tételből.

4. Tétel. Ha $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ egy csökkenő függvény, akkor létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \right) = L_f$$

határérték és $0 \leq L_f \leq f(1)$.

Ha a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ feltétel is teljesül, akkor minden $n \geq 1$ egész számra

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)dx + L_f + V_n(f), \quad 0 \leq V_n(f) \leq f(n).$$

Bizonyítás. Most f csökkenő függvény, ezért minden $k \leq x \leq k+1$ esetén $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, ahonnan

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Tekintsük az $(a_n)_{n \geq 1}$,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx, \quad n \geq 1$$

sorozatot. Minden $n \geq 1$ -re,

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0,$$

tehát $(a_n)_{n \geq 1}$ csökkenő sorozat és

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) + f(n) \geq f(n) \geq 0,$$

mivel f nemnegatív, tehát $0 \leq a_n \leq a_1 = f(1)$, azaz $(a_n)_{n \geq 1}$ korlátos sorozat és így létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_f$ hatérvérték.

Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Akkor

$$\begin{aligned} a_n - L_f &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx - \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^p f(k) - \int_1^p f(x) dx \right) \\ &= - \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n+1}^p f(k) - \int_n^p f(x) dx \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^p \left(\int_{k-1}^k f(x) dx - f(k) \right) \end{aligned}$$

ahonnan

$$0 \leq a_n - L_f \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^p (f(k-1) - f(k)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (f(n) - f(p)) = f(n),$$

amit bizonyítani akartunk.

5. Tétel. Minden $n \geq 1$ egész számra

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + V_n, \quad 0 \leq V_n \leq \frac{1}{n},$$

ahol

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,577215$$

az Euler - állandó.

Ha $s > 0, s \neq 1$ valós szám, akkor minden $n \geq 1$ -re

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + W_n(s), \quad 0 \leq W_n(s) \leq \frac{1}{n^s},$$

ahol

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad s > 1, \quad \zeta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right), \quad 0 < s < 1,$$

a Riemann-féle dzétafüggvény.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4. Tételt az $f(x) = \frac{1}{x}$, majd az $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $s > 0, s \neq 1$ csökkenő függvényekre.

Igazolható, hogy (5)-ben $\frac{1}{2n+1} < V_n < \frac{1}{2n}$ minden $n \geq 1$ -re, lásd [11], [1].

Ha például $s = 2$, akkor (6) alapján írható, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \zeta(2) - \frac{1}{n} + W_n(2), \quad 0 \leq W_n(2) \leq \frac{1}{n^2},$$

Ha $s > 1$, akkor ugyancsak (6)-ból kapjuk, hogy

$$n^{s-1} \left(\zeta(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \right) = \frac{1}{s-1} - n^{s-1} W_n(s),$$

és határértékre térve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{s-1} \left(\zeta(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \right) = \frac{1}{s-1}.$$

A következő eredmény a (6) becslést javítja $s > 1$ esetén, lásd [4], 262. old.

6. Tétel. *Ha $s > 1$ valós szám és $n \geq 1$ egész szám, akkor*

$$(7) \quad \frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} < \zeta(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} < \frac{1}{(s-1)n^{s-1}},$$

azaz $s > 1$ és $n \geq 1$ esetén a (6)-ban szereplő $W_n(s)$ maradéktagra

$$0 < W_n(s) < \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(n+1)^{s-1}} \right).$$

Bizonyítás. Az $s > 1$ feltételt használva,

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_n^t \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(s-1)n^{s-1}},$$

$$\int_{n+1}^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{n+1}^t \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}}.$$

Így, mivel $f(x) = \frac{1}{x^s}$ szigorúan csökkenő függvény,

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} &= \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^s} - \int_{n+1}^\infty \frac{dx}{x^s} = \\ &= \sum_{k=n+1}^\infty \left(\frac{1}{k^s} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \right) > 0, \end{aligned}$$

és hasonlóan,

$$\zeta(s) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^s} - \int_n^\infty \frac{dx}{x^s} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^s} - \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^s} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \right) < 0.$$

A (7) egyenlőtlenségek alkalmasak a $\zeta(s)$ közelítő értékeinek meghatározására.

FELADATOK

1. Adjunk becsléseket a következő összegekre:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}, \quad \sum_{k=3}^n \ln \ln k, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

2. Adjunk becslést a következő összegre:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(\ln k)^s}{k},$$

ahol $s \geq 0$ valós szám.

3. Becsüljük meg az $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n$ szorzatot, ahol $n \geq 1$ egész szám.

4. Hogyan becsülhető nemnegatív konvex (konkáv) függvények esetén a szubgrafikon területe?

5. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1, \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s > 1}} \zeta(s) = \infty, \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s > 1}} (s-1)\zeta(s) = 1.$$

6. Számítsuk ki C , $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ közelítő értékeit 2 (vagy több) tizedesjegynyi pontossággal.

IRODALOM

- [1] ANDRICA, D., TÓTH L., " $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ " típusú sorozatok konvergenciájának nagyságrendje, Mat. Lapok (Kolozsvár), 10-11-12 / 1990, 346-351.
- [2] BALÁZS M., KOLUMBÁN J., Matematikai analízis, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1978.
- [3] CSÁSZÁR, Á., Valós analízis, II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [4] FICHTENHOLT, G. M., Curs de calcul diferențial și integral, vol. II., Editura Tehnică, București, 1964.
- [5] GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O., Konkrét matematika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998.
- [6] MITRINOVIĆ, D. S., Analytic Inequalities, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.
- [7] SIREȚCHI, GH., Calcul diferențial și integral, vol. I. - II., Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [8] L. TÓTH, An elementary derivation of Stirling's asymptotic series, Studia Univ. Babeș-Bolyai, Math. **35**(1990), 57-61.
- [9] TÓTH L., Bizonyos összegek racionális törtfüggvényként való felírhatóságának lehetősége, MatLap (Kolozsvár), 1 / 1998, 5-8.
- [10] TÓTH L., TUZSON Z., Konvex függvények összegzéséről, Mat. Lapok (Kolozsvár), 1 / 1993, 1-6.
- [11] VERNEȘCU, A., Az Euler-állandót meghatározó sorozat konvergenciájának nagyságrendje, Mat. Lapok (Kolozsvár), 10-11 / 1983, 406-407.