

# Ikerprímek

Dr. TÓTH LÁSZLÓ

Pécsi Tudományegyetem

2005

**Ikerprímek**nek nevezünk két olyan prímet, amelyek különbsége 2. Az ilyen párok sorozata a következő:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73),  
(101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199),  
(227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283),  
(311, 313), (347, 349),  
(419, 421), (431, 433), (461, 463),  
(521, 523), (569, 571), (599, 601),  
(617, 619), (641, 643), (659, 661),  
(809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883),  
(1019, 1021), (1031, 1033), (1049, 1051), (1061, 1063), (1091, 1093),  
(1151, 1153),  
(1229, 1231), (1277, 1279), (1289, 1291),  
(1301, 1303), (1319, 1321),  
(1427, 1429), (1451, 1453), (1481, 1483), (1487, 1489),  
(1607, 1609), (1619, 1621), (1667, 1669), (1697, 1699),  
(1721, 1723), (1787, 1789),  
(1871, 1873), (1877, 1879),  
(1931, 1933), (1949, 1951), (1997, 1999),  
(2027, 2029), (2081, 2083), (2087, 2089),  
(2111, 2113),... .

További ikerprímpárok például a következők:

$(10^9 + 7, 10^9 + 9)$ ,  
 $(242\,206\,083 \cdot 2^{38\,880} - 1, 242\,206\,083 \cdot 2^{38\,880} + 1)$ .

Az első 100 000 ikerprímpár listája megtekinthető itt:

<http://primes.utm.edu/lists/small/100ktwins.txt>

Ha  $(p, p+2)$  ikerprímek és  $p \geq 5$ , akkor szükségképpen  $p = 6k-1, p+2 = 6k+1$  alakúak. Modulo 30 szerint a 7-nél nagyobb ikerprímek a következő alakúak:  $(30k-1, 30k+1), (30k+11, 30k+13)$ , vagy  $(30k+17, 30k+19)$ .

**Tétel.** (P. A. CLEMENT, 1949) Az  $n$  és  $n+2$  számok ( $n \geq 2$ ) akkor és csak akkor ikerprímek, ha

$$4((n-1)! + 1) + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}.$$

Vannak olyan prímek, sőt végtelen sok, amelyek nem tagjai ikerprím pároknak, pl. 23, 37, 47, .... Valóban, a Dirichlet-tétel szerint végtelen sok  $15k+7$  ( $k \geq 1$ ) alakú prím létezik, ahol  $(15, 7) = 1$ . Itt  $(15k+7) - 2 = 15k+5$  osztható 5-tel,  $(15k+7) + 2 = 15k+9$  osztható 3-mal, tehát nem prím.

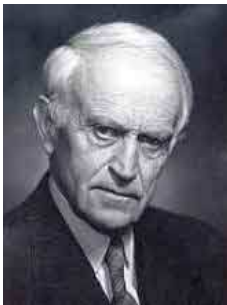
Az  $x$ -nél nem nagyobb ikerprím párok számát  $\pi_2(x)$ -szel szokás jelölni:

$$\pi_2(x) = \sum_{\substack{p, p+2 \leq x \\ p, p+2 \text{ prím}}} 1.$$

Itt például  $\pi_2(10) = 2, \pi_2(100) = 8, \pi_2(1000) = 35, \pi_2(10^{10}) = 27\,412\,679$ .

A prímszámelmélet egy nevezetes, mindmáig megoldatlan kérdése az, hogy létezik-e végtelen sok ikerprím páros. A sejtés az, hogy végtelen sok ilyen pár van.

ALPHONSE DE POLIGNAC (1817-1890) 1849-ben azt az általánosabb sejtést fogalmazta meg, hogy végtelen sok olyan szomszédos prímpár van, amelyek különbsége  $2k$ , ahol  $k \geq 1$ . A  $k = 1$  eset az ikerprímeket jelenti.



V. BRUN

VIGGO BRUN (1885-1978) norvég matematikus bizonyította az alábbi tulajdonságokat:

**Tétel.** (VIGGO BRUN, 1920)

a) Az ikerprímek száma  $x$ -ig

$$\pi_2(x) < Kx \left( \frac{\log \log x}{\log x} \right)^2,$$

ahol  $K$  egy konstans.

b)  $\pi_2(x)/\pi(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ , tehát az ikerprímek sűrűsége a prímek között 0.

c) Az ikerprímek reciprokaiból alkotott

$$\sum_{p, p+2 \text{ prím}} \frac{1}{p}$$

sor konvergens.  $\square$

**Megjegyzések.** 1. A b) állítás azonnal következik az a)-ból a  $\pi(x) > C_1 \frac{x}{\log x}$  becslés alapján:

$$\frac{\pi_2(x)}{\pi(x)} < K \frac{x}{\pi(x)} \left( \frac{\log \log x}{\log x} \right)^2 < K C_1^{-1} \frac{(\log \log x)^2}{\log x} \rightarrow 0.$$

2. A c) szerint vagy véges sok ikerprímpár van, vagy végtelen sok, de úgy, hogy a reciprokaik sora konvergens.

3. A sejtés az, amint már említettük, hogy végtelen sok ikerprímpár van, pontosabban a Hardy-Littlewood sejtés (1922) szerint (GODFREY HAROLD HARDY (1877-1947), JOHN EDENSOR LITTLEWOOD (1885-1977)):

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \frac{x}{\log^2 x},$$

ahol

$$C_2 = \prod_{p>2} \left( 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{4^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{6^2} \right) \cdot \dots = 0,660161\dots$$

az ún. ikerprím-konstans. Még pontosabban, a sejtés az, hogy

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}.$$

A jelenleg ismert legjobb eredmény a következő, amely már csak egy lépésre van az ikerprím-sejtéstől, lásd CHEN JINGRUN, On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, Sci. Sinica 16 (1973), 157–176.

**Tétel.** (CHEN JINGRUN, 1973) Végtelen sok olyan  $p$  prím van, hogy  $p+2$  vagy prím, vagy két (nem feltétlenül különböző) prím szorzata.

A jelenleg ismert legnagyobb ikerprímek :  $\boxed{16\,869\,987\,339\,975 \cdot 2^{171\,960} \pm 1}$ , amelyek 51 779 számjegyű számok, a bejelentés időpontja 2005. szeptember, a felfedezők JÁRAI ANTAL (ELTE, Informatikai Kar) és munkatársai: Csajbók Tímea, Farkas Gábor, Járai Zoltán, Kasza János. Lásd:

<http://compalg.inf.elte.hu/tanszek/projects.php?project=prime>

<http://primes.utm.edu/top20/page.php?id=1>

**További irodalom:**

PAUL POLLACK, Not Always Buried Deep, Selections from Analytic and Combinatorial Number Theory, 2003 Summer Course Notes, Ross Summer Mathematics Program, 2003, 2004,

lásd: <http://www.princeton.edu/~ppollack/notes/notes.pdf>