BEVEZETÉS A MATEMATIKÁBA

Dr. Tóth László

Pécsi Tudományegyetem, 2005

Ebben a jegyzetben áttekintjük a matematikai logika, ezen belül a kijelentéslogika és a predikátumlogika, valamint az elemi halmazelmélet és relációelmélet alapfogalmait és fontosabb összefüggéseit. Az elméleti anyag jobb megértése érdekében minden fejezet illusztráló példákat és kitűzött feladatokat is tartalmaz. Felhívom a figyelmet

– a definíciók pontos ismeretére (a fogalmak nevei **kövér betűkkel** szedettek),

– az egyes fogalmakra adott példákra - adjanak, keressenek további példákat az anyag jobb megértése érdekében,

– a tételek és a tulajdonságok pontos megfogalmazására és a bizonyításokra,

– a kitűzött feladatok megoldására.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A **logika** a gondolkodás általános törvényszerűségeit, szabályait vizsgálja. A **matematikai logika** a matematikában használt gondolkodási formák és következtetések formális szabályaival foglalkozik. Feltárja az állítások szerkezetét, elvonatkoztatva azok tartalmi jelentésétől, és feladata a helyes következtetési szabályok megállapítása.

A matematikai logika ezáltal a matematika, az informatika és más tudományágak megalapozását is szolgálja. Hozzájárul a helyes gondolkodásmód kialakításához és a nyelvi kifejezések helyes használatához.

A matematikai logika módszere eltér a hagyományos logika módszerétől. A szimbólumok használata mellett - emiatt a matematikai logikát sokáig szimbolikus logikának is nevezték - lényeges az absztrakció, a matematikai módszerek, a halmaz, a reláció és a függvény fogalmainak a használata.

Már Arisztotelész (K.e. 384-322), ókori görög filozófus megfogalmazott néhány fontos logikai alapelvet. A matematikai logika G. W. Leibniz (1646-1716) német matematikus és filozófus munkásságának nyomán indult fejlődésnek. Ő egy olyan általános módszert keresett, amely lehetővé teszi az új ismeretek felfedezését és a világ megismerését. Célja az volt, hogy mindent szimbólumokkal fejezzen ki, a közöttük lévő kapcsolatokat pedig a logika törvényei szolgáltassák.

Leibniz nyomán főképp az algebra területén indultak meg a kutatások, majd a geometriai axiómarendszerek ellentmondásmentességének kérdése és a halmazelméleti ellentmondások problémája ösztönözte a matematikai logika fejlődését. Később az aritmetika és a formális nyelvek megalapozása, valamint az informatikai alkalmazások céljából folytak és folynak jelenleg is intenzív kutatások. Jelentős eredményeket értek el G. Boole (1815-1864, angol), A. de Morgan (1806-1873, angol), G. Peano (1858-1932, olasz), B. Russel (1872-1970, angol) és mások.

A halmazelmélet megalkotója G. Cantor (1945-1918) német matematikus. Ebben az ún. naiv halmazelméletben alapfogalmak, azaz definiálatlan fogalmak a halmaz, az elem és az elemnek a halmazhoz való hozzátartozása. Ezeket használva vezethetők be az újabb, immár definiált fogalmak, mint például a halmazok uniója és metszete, vagy a reláció fogalma.

Ennek a szemléletes elméletnek bizonyos korlátai vannak. Erre már a XIX.-XX. század fordulóján rádöbbentek a matematikusok, amikor bizonyos ellentmondásokra, ún. halmazelméleti paradoxonokra vagy antinómiákra találtak. Ez felvetette a halmazelmélet axiomatizálásának a gondolatát. Az axiomatikus halmazelmélet megteremtői E. Zermelo (1871-1953, német), A. Fraenkel (1891-1965, német), Neumann János (1903-1957, magyar) és mások.

1. Logikai alapfogalmak

1.1. Kijelentések. A **kijelentés** (**ítélet** vagy **állítás**) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egyidőben igaz is és hamis is. Jelölés: $p, q, r, ..., x, y, z, ...$, ezeket **kijelentésváltozó**knak nevezzük. Például,

p: "A 17 prímszám." igaz kijelentés,

q: "14 osztható 4-gyel." hamis kijelentés,

r: "Minden 2-nél nagyobb páros szám két prímszám összege." kijelentés, amelyről jelenlegi ismereteink alapján nem tudjuk eldönteni, hogy igaz vagy hamis (Goldbach-sejtés).

A "Szép idő van." mondat nem kijelentés, mert nem egyértelmű, hogy milyen földrajzi területre, milyen időintervallumra vonatkozik az állítás, stb., és emiatt nem allapítható meg, hogy igaz vagy hamis, illetve ennek eldöntéséhez további információkra lenne szükség.

Nem kijelentések a kérdő és a felkiáltó mondatok és nem tekintjük kijelentéseknek a definíciókat sem. Például, az "Egy 2-vel osztható egész számot páros számnak nevezünk." mondat nem kijelentés, de "Minden páros szám osztható 2-vel." egy igaz kijelentés.

A "Most nem mondok igazat." mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos, ha ugyanis ez igaz lenne, akkor nem mondanék igazat, tehát mégsem lenne igaz, ha pedig az állítás hamis lenne, akkor igazat mondanék, tehát az állítás igaz lenne.

Az "igaz" illetve "hamis" a kijelentés **logikai érték**e vagy **igazságértéke**, ezeket a továbbiakban 1 (vagy i), illetve 0 (vagy h) jelöli. Ha p egy adott kijelentés, akkor ennek logikai értékét $|p|$ jelöli, így a fenti kijelentésekre $|p| = 1, |q| = 0$.

Megjegyzések. a) A kijelentés és a kijelentés logikai értéke fenti megadása nem matematikai definíció.

b) Annak eldöntése, hogy egy kijelentő mondat kijelentés-e, és hogy ez esetben mi a logikai értéke, nem a logika feladata. Ez konkrét tapasztalattal, vagy valamely szaktudomány eredményeivel dönthető el, vagy bizonyos esetekben megállapodás kérdése.

c) Már az ókorban Arisztotelész görög filozófus, a logika atyja, megfogalmazta a következő törvényeket:

- Az ellentmondástalanság törvénye: egy kijelentés logikai értéke nem lehet egyidejűleg igaz is és hamis is.

- A kizárt harmadik törvénye: egy kijelentés logikai értéke vagy igaz vagy hamis, harmadik lehetőség nincs.

d) Léteznek az ún. többértékű logikák is, ezekkel mi nem foglalkozunk.

1.2. Műveletek kijelentésekkel. Kijelentésekből újabb, ún. **összetett kijelentések**et képezhetünk az alábbi **logikai alapműveletek** segítségével. Ezek a következők:

1) **Negáció**: A p kijelentés negációja (tagadása) a "Nem p" kijelentés, jele $\neg p$ vagy $\bar{p}$, amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Így $|\neg p| = 1 - |p|$. Táblázattal

p	$\neg p$
0	1
1	0

Például, a p: "A 17 prímszám." kijelentés negációja a $\neg p$: "Nem teljesül, hogy a 17 prímszám." kijelentés, mely így is mondható: $\neg p$: "A 17 nem prímszám." Ez hamis.

2) **Konjunkció** ("logikai és" művelet): A p, q kijelentések konjunkciója a "p és q" kijelentés, jele $p \wedge q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül mindkettő igaz.

A fenti p, q kijelentések konjunkciója a $p \wedge q$: "A 17 prímszám és 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely hamis.

Ez, akárcsak a negáció esetén, megfelel a köznapi használatnak. A köznyelvben az "és" kötőszó helyett állhat például "de", "noha", "bár", "viszont", stb. Ezek hangulatilag befolyásolják az összetett kijelentést, de logikai érték szempontjából nem. Például: "A 10 osztható 2-vel is, 5-tel is.", "A barátom jól vizsgázott, bár nem tanult.", stb.

3) **Diszjunkció** ("logikai vagy"): A p, q kijelentések diszjunkciója a "p vagy q" kijelentés, jele $p \vee q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül legalább az egyik igaz.

Például, a fenti p, q kijelentések diszjunkciója a $p \vee q$: "A 17 prímszám vagy 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely igaz.

Itt a "vagy" kötőszót nem kizáró értelemben használjuk, helyette ez is mondható: "a kettő közül legalább az egyik esetben". A köznyelvben gyakran a "kizáró vagy"-ot használjuk: "Éva ma este színházba vagy moziba megy". Van még az ún. "összeférhetetlen vagy", pl. "A gyorsvonat legközelebb Kecskeméten vagy Nagykőrösön áll meg.", lásd 6. fejezet.

4) **Implikáció**: A p, q kijelentések implikációja a "p implikálja q-t" vagy "p-ből következik q" kijelentés, jele $p \to q$, mely akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

A $p \to q$ implikációt a következő alakok bármelyikével is lehet mondani: "q akkor, ha p", "q, feltéve, hogy p", "p elégséges feltétele q-nak".

Itt p az implikáció **előtag**ja, q az implikáció **utótag**ja.

Ez az értelmezés összhangban van a köznyelvi használattal: Egy hallgató a következőt ígéri társának:

"Ha az előadás pontosan fejeződik be, akkor 12-kor a Kossuth-téren leszek."

Igéretét csak abban az esetben nem tartja be, ha az előtag igaz, az utótag pedig hamis.

5) **Ekvivalencia**: A p, q kijelentések ekvivalenciája a "p ekvivalens q-val" vagy "p akkor és csak akkor, ha q" kijelentés, jele $\leftrightarrow$, mely igaz, ha p, q egyidejüleg igaz vagy hamis és hamis, ha p, q közül egyik igaz, a másik hamis, azaz ha $|p| = |q|$.

A $p \leftrightarrow q$ ekvivalenciát a következőképpen is lehet mondani: "q akkor és csak akkor, ha p", vagy "p szükséges és elegséges feltétele q-nak".

A köznyelvben az ekvivalencia ritkán fordul elő, de gyakori a matematikában, például:

"Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével." (Pitágorász-tétel)

Táblázattal megadva a fenti definíciók a következők:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Figyeljük meg, hogy

$|p \vee q| = |p| + |q| + |p| \cdot |q|, \qquad |p \wedge q| = |p| \cdot |q|,$

$|p \to q| = 1 + |p| + |p| \cdot |q|, \qquad |p \leftrightarrow q| = 1 + |p| + |q|,$

ahol a + és a · modulo 2 értendőek:

x	y	$x+y$	$x\cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Minden kijelentés felbontható olyan kijelentésekre, amelyek már nem tartalmazzák ezeket a műveleteket, s amelyeket **elemi kijelentés**eknek nevezünk.

1.3. Műveleti tulajdonságok.

Tétel. Ha p, q, r tetszőleges kijelentések, akkor igazak a következők.

1) $|\neg\neg p| = |p|$ (a kettős tagadás elve),

A konjunkció és a diszjunkció tulajdonságai:

2)$|(p \wedge q) \wedge r| = |p \wedge (q \wedge r)|$, $\quad |(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$ (asszociativitás),

3) $|p \wedge q| = |q \wedge p|$, $\quad |p \vee q| = |q \vee p|$ (kommutativitás),

4) $|p \wedge (p \vee q)| = |p|$, $\quad |p \vee (p \wedge q)| = |p|$ (abszorbció),

5) $|p \wedge p| = |p|$, $\quad |p \vee p| = |p|$ (idempotencia),

6) $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$, $\quad |p \vee (q \wedge r)| = |(p \vee q) \wedge (p \vee r)|$ (disztributivitás),

A konjunkció és a diszjunkció negációra vonatkozó tulajdonságai:

7) $|p \vee \neg p| = 1$, $\quad |p \wedge \neg q| = 0$,

8) $|\neg(p \wedge q)| = |\neg p \vee \neg q|$, $\quad |\neg(p \vee q)| = |\neg p \wedge \neg q|$ (de Morgan képletek),

Az implikációra és az ekvivalenciára vonatkozó tulajdonságok:

9) $|p \to q| = |\neg p \vee q|$,

10) $|p \leftrightarrow q| = |(p \to q) \wedge (q \to p)|$.

Bizonyítás. Táblázatok segítségével bizonyítunk, például a 8) első összefüggését így:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

A táblázat negyedik és utolsó oszlopának azonossága mutatja az összefüggés érvényességét.

Másképp, algebrai műveletekkel, használva a fenti öszefüggéseket: Például 9) így igazolható:

$$|\neg p \vee q| = |\neg p| + |q| + |\neg p| \cdot |q| = 1 - |p| + |q| + (1 - |p|) \cdot |q| =$$

$$= 1 - |p| + |q| + |q| - |p| \cdot |q| = 1 - |p| + 0 - |p| \cdot |q| = 1 + |p| + |p| \cdot |q| = |p \to q|,$$

mert $-|p| = |p|$, azaz $|p| + |p| = 0$ minden p-re (modulo 2).

Megjegyzés. A fenti Tétel tulajdonságait a $|\,|$ jel elhagyásával is írhatjuk, pl. $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$ vagy $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$.

1.4. Predikátumok, műveletek predikátumokkal. Predikátumoknak nevezzük az olyan kijelentő mondatokat, amelyek egy vagy több változótól függenek és amelyek ezen változók minden megengedett rögzített értékeire egy kijelentést adnak.

A változók lehetnek számok vagy valamely halmaz elemei. A változók számától függően beszélünk egyváltozós, kétváltozós,...,n-változós predikátumokról. Jelölés: $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x_1,x_2,...,x_n)$,..., vagy Px, Pxy, $Px_1x_2...x_n$,... .

Például, $P(x,y,z)$: "$x+y=z$" egy 3-változós predikátum, amelyben az x,y,z változók pl. valós számok. Itt $P(2,1,3)$: "$2+1=3$" igaz kijelentés, $P(3,1,2)$: "$3+1=2$" pedig hamis kijelentés. További példák:

$Q(x)$: "$x>0$" és $R(x)$: "$x\leq 0$" egy-egy, a valós számok halmazán értelmezett 1-változós predikátum,

$S(x,y)$: "$x>y$" egy, az egész számok halmazán értelmezett 2-változós predikátum.

Az n-változós predikátumokra vonatkozó alapműveletek a következőképpen adhatók meg:

$\overline{P}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\overline{P(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$,
$(P\wedge Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
$(P\vee Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
$(P\rightarrow Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\rightarrow Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
$(P\leftrightarrow Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leftrightarrow Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
ahol a jobb oldalon a kijelentésekre vonatkozó alapműveletek szerepelnek.

Például, a $Q(x)$: "$x>0$" és $R(x)$: "$x\leq 0$" 1-változós predikátumok esetén
$(Q\wedge R)(x)$: "$x>0\wedge x\leq 0$", ez minden valós x-re hamis,
$(Q\vee R)(x)$: "$x>0\vee x\leq 0$", ez minden valós x-re igaz.

Ha P,Q egyváltozós predikátumok és minden megengedett x értékre $|P(x)\rightarrow Q(x)|=1$, akkor azt mondjuk, hogy P-ből **következik** Q, vagy Q **következmény**e P-nek, jelölés: $P(x)\Rightarrow Q(x)$ vagy $P\Rightarrow Q$.

Ha minden megengedett x értékre $|P(x)\leftrightarrow Q(x)|=1$, akkor azt mondjuk, hogy P és Q **egyenértékű**ek, vagy **ekvivalens**ek, jelölés: $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ vagy $P\Leftrightarrow Q$.

Például, ha $P(x)$: "$x<1$" és $Q(x)$: "$x\leq 1$" az $\mathbb{R}$ halmazon, akkor $P\Rightarrow Q$. Ha még $S(x)$: "$3x<3$", akkor $P\Leftrightarrow S$.

1.5. Logikai kvantorok. A "minden x-re" kifejezést **univerzális kvantor**nak nevezzzük, jele $\forall x$, olvasd még: "bármely x-re", "tetszőleges x-re".

Legyen $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett egyváltozós predikátum. A $\forall xP(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\forall xP(x)|=\begin{cases}1, & \text{ha minden } a\in A \text{ -ra } |P(a)|=1,\\ 0, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a\in A, \text{ amelyre } |P(a)|=0.\end{cases}$$

Például, ha $P(x)$: "$x^2\geq 0$" az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\forall xP(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha a $Q(x)$: "$x^2>0$" az $\mathbb{R}$-en értelmezett predikátumot tekintjük, akkor $\forall xQ(x)$ hamis kijelentés, mert $x=0$-ra $Q(0)$: "$0^2>0$" hamis kijelentés.

A "van olyan x, hogy" kifejezést **egzisztenciális kvantor**nak nevezzzük, jele $\exists x$, olvasd még: "létezik x úgy, hogy".

Ha $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett predikátum, akkor a $\exists xP(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\exists xP(x)|=\begin{cases}0, & \text{ha minden } a\in A \text{ -ra } |P(a)|=0,\\ 1, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a\in A, \text{ amelyre } |P(a)|=1.\end{cases}$$

Például, ha $P(x)$: "$x^2-2=0$" az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\exists xP(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha $Q(x)$: "$x^2-2=0$" az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán értelmezett predikátum, akkor $\exists x Q(x)$ hamis kijelentés, mert az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet gyökei, a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ nem egész számok.

A következőkben felsorolunk néhány, a bevezetett kvantorokra vonatkozó fontosabb tulajdonságot.

Tétel. Ha $P(x)$ és $Q(x)$ tetszőleges egyváltozós predikátumok, akkor
1) $|\neg(\exists x P(x))| = |\forall x \neg P(x)|$, $\quad |\neg(\forall x P(x))| = |\exists x \neg P(x)|$,
2) $|\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)| = |\forall x (P(x) \wedge Q(x))|$,
3) $|(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x (P(x) \vee Q(x)))| = 1$,
4) $|(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))| = 1$,
5) $|\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)| = |\exists x (P(x) \vee Q(x))|$.

Az 1) tulajdonság szerint a $\exists$ ($\forall$) kvantort úgy negáljuk, hogy helyette a $\forall$ ($\exists$) kvantort írjuk és negáljuk a predikátumot. Például, a

"Van olyan hallgató, aki vizsgázott." negációja "Nincs olyan hallgató, aki vizsgázott.", azaz "Minden hallgató nem vizsgázott." ("Egy hallgató sem vizsgázott.")

" Minden hallgató vizsgázott." negációja: "Nem minden hallgató vizsgázott.", azaz "Van olyan hallgató, aki nem vizsgázott."

Megjegyezzük, hogy a 3) tulajdonságra nézve nem igaz, hogy
$|(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \to (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))| = 1$, azaz nem teljesül, hogy
$|\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)| = |\forall x (P(x) \vee Q(x))|$.

Valóban, legyenek $P(x)$: "$x > 0$" és $Q(x)$: "$x \leq 0$" a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán. Ekkor
$|\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)| = 0$ és $|\forall x (P(x) \vee Q(x))| = 1$.

Hasonlóképpen a 4) tulajdonságra. Szerkesszünk további ellenpéldákat.

1.6. Feladatok.

1. Kijelentések-e a következők ? Ha igen, akkor mi a logikai értékük ?
a) A 91 prímszám.
b) Ha egy egész szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal is.
c) Holnap havazni fog.
c) Figyelj jól !
d) Mikor fedezték fel Amerikát ?
e) Az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke.

2. Írjunk példákat igaz, illetve hamis kijelentésekre.

3. Képezzük a következő kijelentések negációját, konjunkcióját és diszjunkcióját, majd állapítsuk meg ezek logikai értékét:
1) p: "Ma este tanulunk." $\quad q$: Ma este nem nézünk TV-t."
2) p: "$2 \times 2 = 5$." $\quad q$: "27 osztható 9-cel."
3) p: "Olaszország fővárosa Nápoly." $\quad q$: "Európában 19 ország van."

4. Igazoljuk a 1.3. szakasz Tételének állításait.

5. Igazoljuk, hogy az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

6. A $p \to q$ implikáció **megfordítása** a $q \to p$ implikáció, $p \to q$ **kontrapozíciója** pedig a $\neg q \to \neg p$ implikáció. Igazoljuk, hogy:
a) az implikáció ekvivalens a kontrapozíciójával: $|p \to q| = |\neg q \to \neg p|$,
b) az implikáció megfordítása ekvivalens a megfordítás kontrapozíciójával (a kontrapozíció megfordításával): $|q \to p| = |\neg p \to \neg q|$.

7. Készítsük el a következő formulák értéktáblázatát:
a) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$,
b) $(p \to q) \vee r$,
c) $\neg(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \neg p)$.

8. Írjunk példákat predikátumokra.

9. Állapítsuk meg a következő kijelentések logikai értékét:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$,
b) $\forall x \in \mathbb{Z}\ Q(x)$,
c) $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$,
d) $\exists x \in \mathbb{Z}\ Q(x)$,

ahol $P(x)$: "$x^3 \geq 0$", $Q(x)$: "$3x^2 + 2 \geq 3$" és $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

2. Halmazok

2.1. Halmazok. A **halmaz** bizonyos jól meghatározott dolgok (tárgyak, fogalmak), a halmaz **elem**einek az összessége. Azt, hogy az a elem **hozzátartozik** az A halmazhoz így jelöljük: $a \in A$ (a eleme A-nak); $b \notin A$ jelentése: b nem eleme A-nak.

Egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei. Egy halmazt megadhatunk úgy, hogy felsoroljuk az elemeit, pl. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x, y, z\}$ vagy úgy, hogy megadunk egy, a halmaz x elemeire jellemző $T(x)$ tulajdonságot: $A = \{x|T(x)\} = \{x : T(x)\}$, pl. $A = \{x|x \in \mathbb{R}$ és $0 \leq x \leq 3\}$.

A számhalmazokra az alábbi jelöléseket használjuk:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ a természetes számok halmaza,

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ a nemnulla természetes számok halmaza,

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ az egész számok halmaza,

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ a racionális számok halmaza,

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

Az üres halmaz (egyetlen eleme sincs) jele: $\emptyset$. Az A és B halmazokat egyenlőknek nevezzük, ha ugyanazok az elemei, jel. $A = B$.

Az A halmaz **részhalmaz**a a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme, jel. $A \subseteq B$.

Jegyezzük meg, hogy $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a vizsgált halmazok részhalmazai egy U ún. **alaphalmaz**nak (univerzumnak). Az előzék szerint az A és B halmazok egyenlőek, ha $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, itt $P(x) : x \in A$ és $Q(x) : x \in B$ az U halmazon definiált predikátumok. Gyakran ezt így írjuk: $\forall x \in U(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha $x \in A \Rightarrow x \in B$, azaz $\forall x \in U(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

2.2. Műveletek halmazokkal. Az A és B halmazok **metszet**e a közös elemek összessége: $A \cap B = \{x|x \in A$ és $x \in B\}$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B **diszjunkt** vagy **idegen halmazok**.

Az A és B halmazok **egyesítés**e vagy **unió**ja azoknak az elemeknek az összessége, amelyek hozzátartoznak legalább az egyik halmazhoz: $A \cup B = \{x|x \in A$ vagy $x \in B\}$.

Az $A \setminus B$ **különbséghalmaz** az A olyan elemeinek a halmaza, melyek nem tartoznak a B-hez: $A \setminus B = \{x|x \in A$ és $x \notin B\}$.

Ha $A \subseteq E$, akkor $E \setminus A$-t az A halmaz E-re vonatkozó **kiegészítő** vagy **komplementer halmaz**ának nevezzük, jelölés: $\complement_E(A)$. Ha E, neve **alaphalmaz**, rögzített, akkor a $\complement(A)$ vagy $\bar{A}$ jelöléseket is használjuk.

Az A és B halmazok **szimmetrikus különbség**e az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz.

Figyeljük meg, hogy a metszet műveletet a logikai "és" (konjunkció) művelettel értelmezzük, a halmazok unióját pedig a logikai "vagy" (diszjunkció) művelettel. Hasonló kapcsolat van a komplementer halmaz és a negáció, valamint a szimmetrikus különbség és a "kizáró vagy" között.

2.3. Műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asszociativitás),

2) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás),

3) $A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$ (abszorbció),

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),

5) $A \cup \complement_E(A) = E, \quad A \cap \complement_E(A) = \emptyset$,

6) $\complement(A \cap B) = \complement(A) \cup \complement(B), \quad \complement(A \cup B) = \complement(A) \cap \complement(B)$ (de Morgan képletek),
7) $A \cap A = A, \quad A \cup A = A,$
8) $\complement(\complement(A)) = A, \quad A \setminus B = A \cap \complement(B)$.

Bizonyítás. Következnek a logikai műveletekre vonatkozó megfelelő állításokból. Például 6) első képlete így: $x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement(A) \vee x \in \complement(B) \Leftrightarrow x \in \complement(A) \cup \complement(B)$.

Másképp, belátjuk a kétirányú bennfoglalást. Igazoljuk például 3) második képletét: $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ igaz a definíció szerint és $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ is igaz, mert $A \cap B \subseteq A$.

Tétel. (A szimmetrikus különbség tulajdonságai) Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor

1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
2) $A \Delta B = B \Delta A$,
3) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,
4) $A \Delta \emptyset = A, \quad A \Delta A = \emptyset$
5) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Bizonyítás. 3) és 5) kivételével azonnaliak a definíciók alapján. Ez utóbbiakra még visszatérünk.

2.4. Descartes-szorzat, hatványhalmaz. Az A és B halmazok **Descartes-szorzat**ának nevezzük az

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

halmazt. Itt (x, y) **rendezett elempár**t jelöl, ahol lényeges az elemek sorrendje: $(x, y) = (z, t)$ akkor és csak akkor, ha $x = z$ és $y = t$.

Ha A és B elemeinak a száma m, illetve n, akkor $A \times B$ elemeinek a száma mn.

Például, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ esetén $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Általánosan, az $A_1, A_2, ..., A_n$ halmazok **Descartes-szorzat**a az

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}$$

halmaz, ahol $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ún. **rendezett elem n-es**. Ha $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, akkor jelölés: $A \times A \times ... \times A = A^n$.

Például, $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ azonosítható a sík, illetve a tér pontjainak halmazával.

Az A halmaz részhalmazainak az összességét $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$, ez az A **hatványhalmaz**a.

Ha A elemeinek a száma n, akkor a részhalmazok száma 2^n, azaz a hatványhalmaz 2^n elemből áll.

2.5. Predikátumok igazsághalmazai. Az 1.4. szakaszban már definiáltuk az n-változós predikátum fogalmát: az A halmazon értelmezett n-változós predikátum (vagy **logikai függvény**) az A halmaz $x_1, x_2, ..., x_n$ elemeire vonatkozó olyan $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ nyílt kijelentő mondat, amelyre minden rögzített $a_1, a_2, ..., a_n$ esetén $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ egy kijelentés.

A 0-változós predikátumok a kijelentésekkel azonosíthatók.

Ha $P(x_1, x_2, .., x_n)$ egy n-változós predikátum, akkor azoknak az $(a_1, a_2, .., a_n)$ rendezett elem n-eseknek a halmazát, amelyekre $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ igaz a predikátum **igazsághalmazá**nak nevezzük, jelölés: $\mathcal{I}(P)$. Minden predikátumot meghatározza az igazsághalmaza.

Például az $\mathbb{R}$-en adott $P(x,y,z)$: "$x+y=z$" 3-változós predikátum igazsághalmaza az összes $(a,b,a+b)$ alakú rendezett számhármas, ahol a,b valós számok: $\mathcal{I}(P) = \{(a,b,a+b) : a,b \in \mathbb{R}\}$.

A $Q(x)$: "$x > 0$" és $R(x)$: "$x \le 0$" 1-változós predikátumok igazsághalmazai a $(0,\infty)$ és $(-\infty,0]$ intervallumok: $\mathcal{I}(Q) = (0,\infty)$, $\mathcal{I}(R) = (-\infty,0]$.

Ha P egy n-változós predikátum az A halmazon, akkor P igazsághalmazára $\mathcal{I}(P) \subseteq A^n$. Ha $\mathcal{I}(P) = A^n$, akkor azt mondjuk, hogy a P predikátum azonosan igaz, ha pedig $\mathcal{I}(P) = \emptyset$, akkor P azonosan hamis.

Az n-változós predikátumokra vonatkozó alapműveletek a következőképpen is definiálhatók:

a) $\mathcal{I}(\overline{P}) = A^n \setminus \mathcal{I}(P)$,

b) $\mathcal{I}(P \wedge Q) = \mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q)$,

c) $\mathcal{I}(P \vee Q) = \mathcal{I}(P) \cup \mathcal{I}(Q)$,

d) $\mathcal{I}(P \to Q) = (A^n \setminus \mathcal{I}(P)) \cup \mathcal{I}(Q)$,

d) $\mathcal{I}(P \leftrightarrow Q) = A^n \setminus (\mathcal{I}(P) \Delta \mathcal{I}(Q))$.

Megjegyezzük, hogy $P \Rightarrow Q$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{I}(Q)$, továbbá $P \Leftrightarrow Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)$.

2.6. Feladatok

1. Legyen $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$, $C = \{c,e\}$. Adjuk meg a következő halmazokat: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $A \Delta B$, $A \times C$. Készítsünk diagramot.

2. Ha $A = \{a,b,c,d\}$, $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, akkor mi lehet a B halmaz ?

3. Hány részhalmaza van az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaznak ? Általánosítás.

4. Milyen A és B halmazokra igaz, hogy $A \setminus B = B \setminus A$?

5. Igazoljuk a 2.3. szakasz 1. Tételének állításait.

6. Igaz-e, hogy

a) $A \cap (A \cup B) = A$,

b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

tetszőleges A,B,C halmazokra ?

Megoldás. c) Nem. Legyen pl. $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ és $E = \{1,2,3\}$.

7. Igazoljuk, hogy $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ és vezessük le ennek használatával, hogy a Δ művelet asszociatív.

8. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 - (y+1)^2 = 12\}$$

ahol $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$.

9. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + 2y^2 = 5\}.$$

10. Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek a számát:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 2x + 3y = 2000\},$$

ahol $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,...\}$.

11. Ha $A \cap C = \emptyset$, akkor igazoljuk, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

12. Igazoljuk, hogy ha $A \cap C = B \cap C$ és $A \cup C = B \cup C$, akkor $A = B$.

Megoldás. Az abszorbció és a disztributivitás szerint: $A = A \cap (A \cup C) =$
$= A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C) = B \cap (B \cup C)$.

13. Ha A, B, C, D halmazok, akkor:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

b) Az $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ állítás nem igaz általában.

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

3. Relációk

3.1. Relációk, példák relációkra. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ adott halmazok. **n-változós reláció**nak vagy **n-áris reláció**nak nevezzük a $\rho = (A_1, A_2, ..., A_n, R)$ rendszert, ahol R részhalmaza az $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ Descartes-szorzatnak.

Ha $n = 2$, akkor a **kétváltozós reláció** vagy **bináris reláció** fogalmát kapjuk: $\rho = (A_1, A_2, R)$, ahol $R \subseteq A_1 \times A_2$.

A továbbiakban csak bináris relációkkal foglakozunk, ezeket röviden **reláció**knak nevezzük és így jelöljük: $\rho = (A, B, R)$, ahol $R \subseteq A \times B$. Az R halmazt a ρ reláció **grafikon**jának nevezzük és jelölés: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a\rho b$, olvasd: a ρ relációban van b-vel. Ellenkező esetben (a nincs ρ relációban b-vel) a jelölés: $(a, b) \notin R \Leftrightarrow a \not\rho b$.

Azt mondjuk, hogy ρ **homogén reláció**, ha $A = B$; ρ az **üres reláció**, ha $R = \emptyset$; ρ az **univerzális reláció**, ha $R = A \times B$.

Az A halmazon értelmezett **diagonális reláció**nak nevezzük az $\mathbf{1}_A = (A, A, \Delta_A)$, $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ relációt (itt $a\mathbf{1}_A b \Leftrightarrow a = b$).

A ρ relációt gyakran azonosítjuk R grafikonjával, így $A \times B$ az univerzális reláció, $\emptyset$ az üres reláció, Δ_A pedig a diagonális reláció.

Példák. 1) Legyen $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2\}$ és $\rho = (A, B, R)$, ahol $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$. Itt például $a\rho 1, a\rho 2$ és $c \not\rho 2$.

2) Egy sík háromszögeinek A halmazában a hasonlósági reláció grafikonja $A \times A$-nak az a részhalmaza, mely az egymással hasonló háromszögpárokból áll.

3) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán értelmezett oszthatósági reláció a következő homogén reláció: $\rho = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R)$, ahol $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a|b\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac\}$.

4) A predikátumokra definiált $P \Rightarrow Q$ és $P \Leftrightarrow Q$ kapcsolatok egy-egy relációt jelentenek.

5) Legyen A az európai országok halmaza, B pedig az ázsiai országok halmaza, és legyen $a \in A, b \in B$ esetén $a\rho b$ jelentése a következő : a "a" európai ország diplomáciai kapcsolatban van a "b" ázsiai országgal.

6) Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor csak egy $\rho = (A, B, R)$ reláció értelmezhető, s ez az üres reláció, melynek grafikonja $R = \emptyset$.

Figyeljük meg, hogy a 2-változós homogén reláció azonos az 2-változós predikátum fogalmával.

Azt mondjuk, hogy a $\rho = (A, B, R)$ reláció **részrelációja** a $\sigma = (A, B, S)$ relációnak, jelölés $\rho \subseteq \sigma$, ha $R \subseteq S$, azaz ha $\forall (a, b) \in A \times B : a\rho b \Rightarrow a\sigma b$.

3.2. Műveletek relációkkal. A relációkra a következő műveleteket értelmezzük: Tekintsük a $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (A, B, S)$ relációkat.

A ρ és σ relációk **metszet**e a $\rho\cap\sigma = (A, B, R\cap S)$ reláció, tehát $a(\rho\cap\sigma)b \Leftrightarrow a\rho b\wedge a\sigma b$.

A ρ és σ relációk **egyesítés**e vagy **unió**ja a
$\rho \cup \sigma = (A, B, R \cup S)$ reláció, így $a(\rho \cup \sigma)b \Leftrightarrow a\rho b \vee a\sigma b$.

A ρ reláció **kiegészítő relációja** a $\complement\rho = (A, B, \complement R)$ reláció, ahol $\complement R$ az R halmaznak az $A \times B$-re vonatkozó kiegészítő halmaza. Így $a\complement\rho b \Leftrightarrow a \not\rho b$.

A ρ reláció **inverz relációja** a $\rho^{-1} = (B, A, R^{-1})$ reláció, ahol $R^{-1} = \{(b, a) \in B\times A : (a, b) \in R\}$. Így $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$.

Példák. A $\mathbb{Z}$ halmazon az $=$ részrelációja a $\leq$ relációnak és az $|$ oszthatósági reláció nem részrelációja a $\leq$-nek, mert például $2| - 6$ és $2 \not\leq -6$.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $\leq$ és $\geq$ relációk metszete az $=$ reláció, az $=$ és a $<$ relációk egyesítése pedig a $\leq$ reláció.

$\mathbb{R}$-ben a $<$ reláció kiegészítő relációja a $\geq$ reláció, és $<$ inverze a $>$ reláció.

Tétel. Ha $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (A, B, S)$ két reláció, akkor igazak a következő összefüggések:

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$, $\quad (\complement\rho)^{-1} = \complement\rho^{-1}$,

2) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$, $\quad (\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$,

3.3. Reláció metszetei.

Legyen $\rho = (A, B, R)$ egy reláció és $X \subseteq A$. A $\rho(X) = \{b \in B | \exists x \in X : x\rho b\}$ halmazt a ρ **reláció** X **részhalmazra vonatkozó metszet**ének nevezzük. Ha $X = \{x\}$ egy egyelemű halmaz, akkor jelölés: $\rho(\{x\}) = \rho\langle x\rangle = \{b \in B : x\rho b\}$.

A $\rho(A)$ metszetet a ρ reláció **második projekció**jának nevezzük és $pr_2(\rho)$-val jelöljük. A $\rho^{-1}(B) = \{a \in A | \exists b \in B : a\rho b\}$ metszet a ρ reláció **első projekció**ja, jelölés: $pr_1(\rho)$.

Megjegyezzük, hogy $\rho(X), \rho\langle x\rangle, pr_2(\rho) \subseteq B$ és $pr_1(\rho) \subseteq A$.

Példa. A fenti első példában adott relációra $\rho(\{a, b\}) = \{1, 2\}, \rho(\{c, d\}) = \{1\}$, $\rho\langle a\rangle = \{1, 2\}, \rho\langle d\rangle = \emptyset, pr_2(\rho) = \{1, 2\}, pr_1(\rho) = \{a, b, c\}$.

3.4. Homogén relációk tulajdonságai. A továbbiakban néhány fontosabb típusú homogén relációt vizsgálunk.

Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Azt mondjuk, hogy

a) ρ **reflexív**, ha minden $x \in A$ esetén $x\rho x$ $(\forall x \in A \Rightarrow x\rho x)$, azaz ”minden elem relációban van önmagával”;

b) ρ **tranzitív**, ha minden $x, y, z \in A, x\rho y$ és $y\rho z$ esetén $x\rho z$ $(\forall x, y, z \in A : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$, azaz ”valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ez utóbbi elem relációban van egy harmadikkal, akkor az első is relációban van a harmadikkal”;

c) ρ **szimmetrikus**, ha minden $x, y \in A, x\rho y$ esetén $y\rho x$ $(\forall x, y \in A : x\rho y \Rightarrow y\rho x)$, azaz ”valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel, akkor ez utóbbi elem is relációban van az első elemmel”;

d) ρ **antiszimmetrikus**, ha minden $x, y \in A, x\rho y$ és $y\rho x$ esetén $x = y$ $(\forall x, y \in A : x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$, azaz ”valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ha ez utóbbi elem is relációban van az elsővel, akkor a két elem egyenlő”;

e) ρ **előrendezési reláció**, ha ρ reflexív és tranzitív. Ekkor (A, ρ) neve **előrendezett halmaz**;

f) ρ **ekvivalenciareláció**, ha ρ reflexív, tranzitív és szimmetrikus. Az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk összességét $\mathcal{E}(A)$-val jelöljük;

g) ρ **rendezési reláció**, ha ρ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ekkor (A, ρ) neve **rendezett halmaz**.

Megjegyzés. Igazolhatók a következő állítások:

i) ρ reflexív $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho$;

ii) ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;

iii) ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$;

iv) ρ reflexív és antiszimmetrikus $\Rightarrow \rho \cap \rho^{-1} = 1_A$;

v) ρ ekvivalenciareláció $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho \wedge \rho = \rho^{-1}$;

vi) ρ ekvivalenciareláció és rendezési reláció $\Leftrightarrow \rho = 1_A$.

Példák. 1) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán az oszthatóság előrendezési reláció, nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus, mert például $3 | -3$ és $-3 | 3$, de $-3 \neq 3$.

2) A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán az oszthatóság rendezési reláció és $(\mathbb{N}, |)$ rendezett halmaz.

3) A $\mathbb{Z}$ halmazon az $a \equiv b \pmod 6 \Leftrightarrow 6|a-b \Leftrightarrow$ az a-nak és b-nek a 6-tal való osztási maradékai egyenlőek, ún. kongruencia reláció ekvivalenciareláció.

4) Az $(A, A, A \times A)$ univerzális reláció ekvivalenciareláció.

3.5. Ekvivalenciarelációk és osztályozások

Ha ρ ekvivalenciareláció az A halmazon, akkor a $\rho\langle x\rangle = \{y \in A : x\rho y\}$ metszeteket, ahol $x \in A$, **ekvivalenciaosztály**oknak nevezzük. Egy rögzített ekvivalenciaosztályba tartoznak az egymással relációban lévő elemek. Az ekvivalenciaosztályok halmazát a ρ-hoz rendelt **faktorhalmaz**nak nevezzük: $A/\rho = \{\rho\langle x\rangle : x \in A\}$.

Példák. 1) A $\mathbb{Z}$ halmazon az előbbi, $a \equiv b \pmod 6$ kongruencia relációhoz rendelt faktorhalmaz $\mathbb{Z}/\equiv\, = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{5}\}$, ahol $\widehat{k} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv k \pmod 6\} = \{x \in \mathbb{Z} : 6|x-k\} = \{..., k-12, k-6, k, k+6, k+12, ...\}$.

2) $A/1_A = \{\{x\} : x \in A\}$ és $A/(A \times A) = \{A\}$.

Legyen A egy nemüres halmaz és legyen $(B_i)_{i\in I}$ az A részhalmazainak egy rendszere (itt I egy ún. indexhalmaz): $B_i \subseteq A$ minden $i \in I$-re. Azt mondjuk, hogy $(B_i)_{i\in I}$ egy **osztályfelbontás**a vagy **osztályozás**a A-nak, ha

a) $B_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$,

b) $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i, j \in I, i \neq j$, azaz barmely két különböző részhalmaz diszjunkt,

c) $A = \cup_{i\in I} B_i$, azaz a $(B_i)_{i\in I}$-beli részhalmazok uniója az adott A halmaz.

Például az $A = \{1, 2, 3, 4, 4, 6\}$ halmaznak a $B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}, B_3 = \{5\}, B_4 = \{6\}$ részhalmazok egy osztályfelbontását adják.

A következő tétel azt mutatja, hogy az ekvivalenciarelációk és az osztályfelbontások kölcsönösen meghatározzák egymást. Ha ugyanis adott egy ekvivalenciareláció, akkor gyűjtsük össze az egymással relációban levő elemeket és egy osztályfelbontást kapunk. Ha pedig adott egy osztályfelbontás, akkor képezzük azt a relációt, mely szerint 2 elem relációban van, ha ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak. Ez ekvivalenciareláció lesz. Pontosabban,

Tétel. Legyen A egy nemüres halmaz.

1) Ha ρ egy ekvivalenciareláció az A-n, akkor az $A/\rho = \{\rho\langle x\rangle : x \in A\}$ faktorhalmaz egy osztályfelbontása A-nak.

2) Legyen $(B_i)_{i\in I}$ egy osztályfelbontása A-nak és értelmezzük a következő relációt: $\rho = (A, A, R)$, ahol $R = \cup_{i\in I}(B_i \times B_i)$, azaz $x\rho y \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$ (x és y ugyanahhoz a B_i-hez tartoznak). Akkor ρ ekvivalenciareláció az A-n.

3.6. Rendezési relációk. Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Emlékeztetünk arra, lásd fennebb, hogy ρ **rendezési reláció** és (A, ρ) **rendezett halmaz**, ha ρ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ekkor azt mondjuk, hogy (A, ρ) **teljesen rendezett halmaz** vagy **lánc**, ha a következő tulajdonság is teljesül: $\forall x, y \in A \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$ (másképpen $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$, az univerzális reláció), azaz A bármely két eleme összehasonlítható a ρ reláció szerint.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ teljesen rendezett halmazok.

2) $(\mathbb{N}, |)$ rendezett halmaz és nem teljesen rendezett, mert pl. 2 és 3 nem hasonlíthatók össze, egyik sem osztója a másiknak.

3) Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ rendezett halmaz. Ha A-nak egynél több eleme van, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nem teljesen rendezett.

Ha ρ rendezési reláció, akkor $x\rho y$ helyett gyakran $x \leq y$-t írunk, akkor is, ha ρ nem a szokásos "kisebb vagy egyenlő" reláció. További jelölések: $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$ (szigorú egyenlőtlenség); $x > y$, ha $y < x$.

A véges rendezett halmazokat **Hasse-féle diagram**okkal ábrázoljuk. Ha $x < y$ és ha nem létezik $z \in A$ úgy, hogy $x < z < y$, akkor az y pontot az x pontnál magasabb szinten helyezzük el és a két pontot egy egyenes szakasszal összekötjük.

Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz és $x \in A$. Azt mondjuk, hogy x az A-nak **legkisebb elem**e vagy **minimum**a (**legnagyobb elem**e vagy **maximum**a), ha $\forall a \in A \Rightarrow x \leq a$ (illetve $\forall a \in A \Rightarrow a \leq x$). Jelölés: $x = \min A$ (illetve $x = \max A$).

Megjegyezzük, hogy ha létezik legkisebb elem (legnagyobb elem), akkor csak egy ilyen van. Valóban, ha például x és x' legkisebb elemek, akkor $x \leq x'$ (mert x legkisebb elem) és $x' \leq x$ (mert x' legkisebb elem), így az antiszimmetria alapján $x = x'$.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq)$-ben $x = 0$ legkisebb elem és legnagyobb elem nem létezik.

2) $(\mathbb{N}, |)$-ban az 1 a legkisebb elem és a 0 a legnagyobb elem, mert $1|a$ és $a|0$ minden $a \in \mathbb{N}$ esetén.

3) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban nem létezik legkisebb elem és nem létezik legnagyobb elem.

4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$-ban $\min \mathcal{P}(A) = \emptyset$ és $\max \mathcal{P}(A) = A$.

Az $(A, \leq)$ egy rendezett halmaznak $x \in A$ **minimális elem**e (**maximális elem**e), ha $\forall a \in A : a \leq x \Rightarrow a = x$ (illetve $\forall a \in A : x \leq a \Rightarrow a = x$). Másképp fogalmazva $x \in A$ minimális elem (maximális elem), ha A-ban nincs olyan a elem, melyre $a < x$ (illetve $a > x$).

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq)$-ben $x = 0$ minimális elem és maximális elem nem létezik.

2) $(\mathbb{N}, |)$-ban az 1 minimális elem és 0 maximális elem.

3) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban a prímszámok minimális elemek és maximális elem nem létezik.

Az értelmezések alapján azonnali, hogy ha létezik legkisebb (legnagyobb) elem, akkor ez az egyetlen minimális (maximális) elem. A fordított állítás nem igaz, például ha $A = \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 9\}$, akkor az $(A, |)$ rendezett halmazban a 9 az egyetlen maximális elem és nem létezik legnagyobb elem.

Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz és $B \subseteq A, B \neq \emptyset$, akkor beszélhetünk a B legkisebb (legnagyobb) eleméről valmint a B minimális (maximális) elemeiről.

Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett halmaz, akkor a minimális elem (maximális elem) fogalma egyenértékű a legkisebb elem (illetve legnagyobb elem) fogalmával.

Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz, $x \in A$ és $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy x **alsó korlát**ja (**felső korlát**ja) B-nek, ha $\forall b \in B \Rightarrow x \leq b$ (illetve $\forall b \in B \Rightarrow b \leq x$). Továbbá, x a B-nek **infimum**a vagy **legnagyobb alsó korlát**ja (**szuprémum**a vagy **legkisebb felső korlát**ja), ha x a B alsó korlátai halmazának maximuma (illetve x a B felső korlátai halmazának minimuma). Jelölés: $x = \inf B$ (illetve $x = \sup B$).

Példák. 1) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban a $B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ halmaznak egyetlen alsó korlátja van, az $x = 1$, $\inf B = 1$, B-nek felső korlátja és szuprémuma nem létezik

2) $(\mathbb{R}, \leq)$-ban a $B = (1, 3]$ intervallumnak alsó korlátja minden $x \leq 1$ szám és felső korlátja minden $x \geq 3$ szám, továbbá $\inf B = 1 \notin B$, $\sup B = 3 \in B$.

Következik, hogy minden B részhalmaznak legfeljebb egy infimuma és legfeljebb egy szuprémuma létezhet; továbbá, ha B-nek van olyan x alsó korlátja (y felső korlátja), mely B-nek eleme, akkor $x = \inf B$ (illetve $y = \sup B$).

Az $(A, \leq)$ rendezett halmazt **háló**nak nevezzük, ha A minden kételemű részhalmazának létezik infimuma és létezik szuprémuma ($\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow \exists \inf\{a, b\} \wedge \exists \sup\{a, b\}$). $(A, \leq)$ **teljes háló**, ha A minden nemüres részhalmazának létezik infimuma és létezik szuprémuma ($\forall B \subseteq A \Rightarrow \exists \inf B \wedge \exists \sup B$). $(A, \leq)$ **jólrendezett halmaz**, ha A minden nemüres részhalmazának létezik legkisebb eleme ($\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min B \in B$).

Példák. 1) $(\mathbb{N}^*, |)$ háló: minden $a, b \in \mathbb{N}^*$-ra $\inf\{a, b\}$ az a és b számok legnagyobb közös osztója, $\sup\{a, b\}$ pedig az a és b számok legkisebb közös többszöröse.

2) Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett, akkor $(A, \leq)$ háló: $\forall a, b \in A : \inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$ és $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$.

3) $(\mathbb{R}, \leq)$ nem teljes háló, mert például a $B = (-\infty, 0)$ intervallumnak nem létezik alsó korlátja s így nincs szuprémuma $(\mathbb{R}, \leq)$-ben.

4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ teljes háló. Ha $X = \{X_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, akkor $\inf X = \cap_{i\in I} X_i$ és $\sup X = \cup_{i\in I} X_i$.

5) Ha $(A, \leq)$ jólrendezett, akkor $(A, \leq)$ teljesen rendezett. $(\mathbb{N}, \leq)$ jólrendezett, $(\mathbb{R}, \leq)$ nem jólrendezett, mert például a $(0, 1)$ intervallumnak nincs legkisebb eleme.

3.7. Feladatok

1. Adott $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Írjuk fel az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat.

2. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $\rho = (A, B, R)$, ahol $R = \{(a, b) \in A \times B : a + b = 8\}$.

a) Adjuk meg az R halmazt.

b) Adjuk meg a relációt diagrammal.

3. Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon adott a következő homogén reláció: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

Adjuk meg gráffal ezt a relációt. Rendelkezik-e a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságokkal ? Ekvivalenciareláció-e ? Ha nem, akkor adjunk meg az A halmazon egy ekvivalenciarelációt.

4. Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon a ρ relációt így definiáljuk: $(a, b)\, \rho\, (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = b + c$.

Igazoljuk, hogy ρ ekvivalenciareláció.

5. A $H = \{a, b, c, d\}$ halmazon adjunk meg egy-egy olyan relációt, amely

a) reflexív, szimmetrikus, de nem tranzitív,

b) nem reflexív, de szimmetrikus és tranzitív,

c) reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus,

d) reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív.

6. Adjuk meg az összes ekvivalenciarelációt az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon.

7. Határozzuk meg az összes rendezési relációt az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon (készítsünk Hasse–féle diagramokat).

8. Legyen ρ_1 és ρ_2 két ekvivalenciareláció az A halmazon. Igazoljuk, hogy

a) ρ_1^{-1} és $\rho_1 \cap \rho_2$ ekvivalenciareláció,

b) $\complement\rho_1$ és $\rho_1 \cup \rho_2$ általában nem ekvivalenciareláció.

9. Legyen ρ egy reflexív és tranzitív reláció az A halmazon. Igazoljuk, hogy $\rho \cap \rho^{-1}$ ekvivalenciareláció.

Vizsgáljuk azt az esetet, mikor $A = \mathbb{R}$ és ρ a "$\leq$" reláció.

10. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Ha $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, határozzuk meg a megfelelő osztályfelbontást.

b) A $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ osztályfelbontáshoz határozzuk meg a megfelelő ekvivalenciarelációt.

11. A komplex számok halmazán tekintsük a ρ_1 és ρ_2 relációkat, ahol $z\rho_1 w \Leftrightarrow |z| = |w|$ és $z\rho_2 w \Leftrightarrow z = w = 0$ vagy $\arg z = \arg w$. Igazoljuk, hogy ρ_1 és ρ_2 ekvivalenciarelációk és ábrázoljuk grafikusan a $\mathbb{C}/\rho_1$ és $\mathbb{C}/\rho_2$ osztályait.

12. Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz. Ha létezik $a = \min A$, akkor a az A egyetlen minimális eleme. Igazoljuk, hogy a fordított állítás nem igaz.

4. FÜGGVÉNYEK

4.1. A függvény fogalma. Az $f = (A, B, F), F \subseteq A \times B$ relációt **függvény**nek vagy **leképezés**nek nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén az $f\langle a\rangle$ metszet egyelemű részhalmaza B-nek. Ez azt jelenti, hogy az f függvény az A halmaz minden elemének megfelelteti a B halmaz egy és csak egy elemét.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor A-t az f **értelmezési halmazá**nak vagy **értelmezési tartományá**nak nevezzük, jelölés $A = dom f$ (f doméniuma). A B halmaz az f **értékkészlete**, jelölés $B = codom f$ (f codoméniuma), az $f(A)$ metszet az f függvény **értéktartomány**a vagy **kép**e, jelölés $f(A) = Imf$, F pedig a függvény grafikonja.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor a következő jelöléseket használjuk:
$f : A \to B, A \xrightarrow{f} B$. Ha $a \in A$, akkor az $f\langle a\rangle = \{b\}$ egyenlőséggel meghatározott $b \in B$ elem jelölése $b = f(a)$ vagy $a \mapsto b = f(a)$.

Megjegyzések. a) Az $f : A \to B$ és $f' : A' \to B'$ függvények akkor és csak akkor egyenlőek ($f = f'$), ha $A = A', B = B'$ és $f(a) = f(a')$ minden $a \in A$ esetén.

b) Ha $f : A \to B$ egy függvény és $X \subseteq A, Y \subseteq B, y \in Y$, akkor $f(X) = \{b \in B | \exists x \in X : f(x) = b\} = \{f(x) : x \in X\}$, $f^{-1}(Y) = \{a \in A | \exists y \in Y : af^{-1}y\} = \{a \in A | \exists y \in Y : f(a) = y\} = \{a \in A : f(a) \in Y\}$ és $f^{-1}\langle y\rangle = f^{-1}(y) = \{a \in A : f(a) = y\}$, a grafikon pedig $F = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

c) A 3. szakasz 1. Példájában szereplő reláció nem függvény, mert például $\rho\langle a\rangle = \{1, 2\}$ kételemű halmaz. A $\rho' = (A, B, R'), A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2\}$, $R' = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$ reláció függvény.

4.2. Karakterisztikus függvény. Legyen E egy halmaz és $A \subseteq E$. A $\chi_A : E \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvényt az A részhalmaz **karakterisztikus függvény**ének nevezzük.

Tétel. Ha $A, B \subseteq E$, akkor
i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x), \quad \forall x \in E$,
ii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x), \quad \forall x \in E$,
iii) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in E$,
iv) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x), \quad \forall x \in E$,
v) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x), \quad \forall x \in E$,
vi) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)), \quad \forall x \in E$,
vii) $\chi_{A\Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x) = (\chi_A(x) - \chi_B(x))^2, \quad \forall x \in E$.

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $A \subseteq B$ és legyen $x \in E$. A következő eseteket vizsgáljuk: 1. $x \in A, x \in B$, akkor $1 \le 1$ igaz, 2. $x \in A, x \notin B$, ez lehetetlen, 3. $x \notin A, x \in B$, akkor $0 \le 1$ igaz, 4. $x \notin A, x \notin B$, akkor $0 \le 0$ igaz.

Másképp: az igazolandó egyenlőtlenség csak akkor lenne hamis, ha $\chi_A(x) = 1$ és $\chi_B(x) = 0$. De ekkor $x \in A$ és $x \notin B$, ami ellentmond a feltételnek.

Hasonlóképpen a fordított implikáció.

ii) Következik i) alapján.

A többi összefüggés az előbbi 4 eset vizsgálatával igazolható, vagy úgy, hogy használjuk az előző (és már igazolt) képleteket, például: vi) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, lásd 2. fejezet, és így

$$\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_{A\cap\bar{B}}(x) = \chi_A(x)\chi_{\bar{B}}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)).$$

Megjegyzés. A ii) alapján ezek a képletek alkalmasak halmazok egyenlőségének a bizonyítására. Például igazoljuk, hogy $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (a szimmetrikus különbség asszociatív, lásd 2. szakasz):

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\chi_C =$$

$$(*) \qquad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,$$

ahol függvényegyenlőségeket írtunk (x nélkül).

Hasonlóképpen számolva, $\chi_{A\Delta(B\Delta C)}$ is a (*) kifejezést adja. Másképp, Δ kommutativitása és (*) alapján

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(B\Delta C)\Delta A} = \chi_B + \chi_C + \chi_A - 2(\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_A + \chi_C\chi_A) + 4\chi_B\chi_C\chi_A =$$

$$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,$$

és készen vagyunk.

4.3. Injektív, szürjektív és bijektív függvények. Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy

f **injektív**, ha A különböző elemeinek különböző képelemek felelnek meg, azaz, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ez egyenértékű a következő állítással: $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

f **szürjektív**, ha B-nek minden eleme képelem, azaz, ha $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Ez a feltétel így is írható: $f(A) = B$;

f **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz, ha $\forall y \in B \exists! x \in A$ (létezik egy és csak egy $x \in A$): $f(x) = y$.

Példák: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ függvény nem injektív, mert pl. $-1 \neq 1$ és $f(-1) = f(1) = 1$ és nem is szürjektív, mert pl. $y = -1 \in \mathbb{R}$ esetén nem létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = x^2 = -1$ legyen.

A $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ függvény injektív és nem szürjektív,
$h : [0, \infty) \to [0, \infty), h(x) = x^2$ pedig injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Bármely A halmaz esetén az $\mathbf{1}_A = (A, A, \Delta_A)$ diagonális reláció egy bijektív függvény.

4.4. Függvények kompozíciója. Az $f : A \to B$ és a $g : B \to C$ függvényeknek ilyen sorrendben vett **összetétele (kompozíciója vagy szorzata)** az a $g \circ f : A \to C$ függvény, amelyre $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ minden $a \in A$-ra. Ez az a leképezés, amelyet előbb az f majd a g leképezés egymásutáni végrehajtása révén kapunk.

A $g(f(x))$ függvényben a g-t külső, az f-et pedig belső függvénynek nevezzük.

Tétel a) Ha $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ tetszőleges függvények, akkor

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

azaz a függvények kompozíciója asszociatív.

b) Minden $f : A \to B$ függvényre

$$f \circ \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ f = f.$$

c) A függvények kompozíciója nem kommutatív.

Bizonyítás. a) A definíció alapján $(h \circ g) \circ f : A \to D$ és $h \circ (g \circ f) : A \to D$, tehát mindkét esetben A az értelmezési halmaz és D az értékkészlet, továbbá minden $a \in A$-ra

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))),$$

és

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).$$

c) Legyen például $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+3$ és $g(x) = x^2$. Akkor $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2$ és $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$, ahonnan következik, hogy $g \circ f \neq f \circ g$.

Ha $f : A \to B$ egy bijektív függvény, akkor az f^{-1} inverz reláció függvény, ez az f inverz függvénye: $f^{-1} : B \to A$, ahol $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$. Ekkor az f^{-1} függvény is bijektív és f^{-1} inverze az eredeti f függvény : $(f^{-1})^{-1} = f$. Igaz továbbá, hogy

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A, \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B.$$

4.5. Feladatok

1. Igazoljuk a 4. fejezet 1. Tételének állításait !

2. Karakterisztikus függvények segítségével igazoljuk, hogy
 a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,
 b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
 c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

3. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Adjunk meg egy-egy olyan A, B vagy C értelmezési tartományú és értékkészletű függvényt, amely
 a) szürjektív és nem injektív,
 b) nem szürjektív és injektív,
 c) szürjektív és injektív, tehát bijektív,
 d) nem szürjektív és nem injektív.

4. Injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e a következő függvények:
 a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$,
 b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$,
 c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4$.

5. Határozzuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ahol
 a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 1$,
 b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = 1 - 2x$,
 c) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ és $g(x) = x$, ha $x \leq 1$, $g(x) = x + 2$, ha $x > 1$.

6. A következő függvények közül melyeknek van inverze? Ha létezik inverz, adjuk meg!
 a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$,
 b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$,
 c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 4x + 2$,
 d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$,
 e) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x$,
 f) $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \lg x$,

7. Legyen $f : A \to B$ és $g : B \to C$ két függvény. Igazoljuk, hogy:
 a) Ha f és g injektív (szürjektív), akkor $g \circ f$ is injektív (szürjektív).
 b) Ha $g \circ f$ injektív (szürjektív), akkor f injektív (g szürjektív).
 c) Ha $g \circ f$ injektív és f szürjektív, akkor g injektív.
 d) Ha $g \circ f$ szürjektív és g injektív, akkor f szürjektív.

5. HALMAZOK SZÁMOSSÁGA

5.1. Ekvivalens halmazok. Az A és B halmazokat **ekvivalens halmazok**nak nevezzük, ha létezik egy $f : A \to B$ bijektív függvény. Jelölés: $A \sim B$. Ez egy, a halmazokra vonatkozó reláció.

Tétel. A $\sim$ reláció egy ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor az $\mathbf{1}_A : A \to A$, $\mathbf{1}_A(a) = a$ függvény bijektív, tehát $\sim$ reflexív. Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor léteznek az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív függvények. Mivel $g \circ f : A \to C$ is bijektív, következik, hogy $A \sim C$, tehát $\sim$ tranzitív. Ha $f : A \to B$ bijektív, akkor $f^{-1} : B \to A$ is bijektív, tehát $\sim$ szimmetrikus.

Az A halmaz ekvivalenciaosztályát az A **számosságá**nak vagy **kardinális számá**nak nevezzük. Jelölés: $|A| = \{B : A \sim B\}$.

Bármely halmazt összehasonlíthatunk olyan halmazokkal, amelyek elemei természetes számok. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **véges** és n számosságú, ahol $n \in \mathbb{N}$, ha A ekvivalens az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazzal: $A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}, |A| = n$. Az üres halmaz számossága 0: $|\emptyset| = 0$. Egy halmaz **végtelen**, ha nem véges.

A végtelen halmazok számosságait **transzfinit számosság**oknak nevezzük. Az $\mathbb{N}$ halmaz végtelen, számossága $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef null), itt $\aleph$ a héber ábécé első betűje.

5.2. Megszámlálható halmazok. Az $\aleph_0$ számosságú halmazokat **megszámlálható halmaz**oknak nevezzük. Így egy A halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik egy $f : \mathbb{N} \to A$ bijektív függvény. Ez azt jelenti, hogy az A halmaz elemei egy végtelen sorozatba rendezhetők, amelyben nincs ismétlődés, azaz A felírható $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ alakban.

Például az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza megszámlálható, mert
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\}$, itt

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 1, \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros }, \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan }, \end{cases}$$

bijektív függvény.

A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza is megszámlálható. Valóban, nézzük először a pozitív $\frac{a}{b}$ racionális számokat, ahol a és b relatív prímek, s rendezzük ezeket sorba az $a+b$ összeg növekvő értékei szerint úgy, hogy minden rögzített $a+b$ értékre a számlálók növekvő értékei szerint rendezünk:

$$a + b = 2 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{1}; \quad a + b = 3 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}; \quad a + b = 4 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1};$$

$$a + b = 5 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}; \quad a + b = 6 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}; ...,$$

ahol a $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, ...$ számokat nem vettük figyelembe, s így

$$\mathbb{Q}^+ = \{\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}, ...\}$$

megszámlálható, ahonnan következik, hogy $\mathbb{Q}$ is megszámlálható , mert

$$\mathbb{Q} = \{0, \tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1}, ...\}.$$

Igazolható, hogy a $\mathbb{Z}[X]$ és $\mathbb{Q}[X]$ halmazok is megszámlálhatóak, ahol $\mathbb{Z}[X]$ az egész együtthatós polinomok halmaza, $\mathbb{Q}[X]$ pedig a racionális együtthatós polinomok halmaza.

A kérdés ezek után: Van-e nem megszámlálható végtelen halmaz? A válasz: igen, van ilyen halmaz. Ez következik az alábbi tételből.

Tétel. Legyen A egy tetszőleges halmaz és jelölje $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ az A hatványhalmazát. Akkor

i) A nem ekvivalens $\mathcal{P}(A)$-val,

ii) $\mathcal{P}(A)$-nak létezik olyan részhalmaza, amely ekvivalens A-val.

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $A \sim \mathcal{P}(A)$, azaz létezik egy $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijektív fggvény. Itt minden $a \in A$ esetén $f(a) \in \mathcal{P}(A)$, tehát $f(a) \subseteq A$. Legyen $B = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$. Ekkor f bijektivitása miatt létezik $b \in A$ úgy, hogy $f(b) = B$. A b elemre nézve két lehetőség van:

1. ha $b \in B$, akkor B definíciója miatt $b \notin f(b) = B$, ami ellentmondás,
2. ha $b \notin B$, akkor szintén B definíciója alapján $b \in f(b) = B$, ez is ellentmondás.

Ezzel igazoltuk, hogy A nem ekvivalens $\mathcal{P}(A)$-val.

ii) Legyen $C = \{\{a\} : a \in A\}$ az A elemeiből képzett egyelemű részhalmazok halmaza. Ekkor $f : A \to C$, $f(a) = \{a\}$ bijektív függvény, ezért $C \sim A$.

A tételből következik, hogy ha A megszámlálható, akkor $\mathcal{P}(A)$ végtelen, de nem ekvivalens A-val, tehát nem megszámlálható. Például $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ nem megszámlálható halmazok. Igazolható, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza ekvivalens $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-nel, tehát $\mathbb{R}$ nem megszámlálható.

Az $\mathbb{R}$ számosságát **kontinuum számosság**nak nevezzük, jelölés: $|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0}$.

Az alábbi tételből következik, hogy a "halmazok halmaza" ellentmondásos fogalom. Az ilyen és hasonló ellentmondások, ún. paradoxonok elkerüléséhez tisztázni kell, hogy adott halmazokból kiindulva milyen eljárásokkal szerkeszthetünk újabb halmazokat. De ez már az axiomatikus halmazelmélet feladata, ezzel nem foglalkozunk.

Tétel. Nincs olyan halmaz, amely minden halmazt elemként tartalmaz.

Bizonyítás. A gondolatmenet hasonló az előző bizonyításhoz. Tegyük fel, hogy van ilyen $\mathcal{A}$ halmaz. Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : A \notin A\},$$

amely az összes olyan halmazból áll, amely nem eleme önmagának. Nézzük meg, hogy $\mathcal{B}$ eleme-e önmagának vagy sem.

1. Ha $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{B}$ definíciója miatt $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$, ami ellentmondás.
2. Ha $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$, akkor szintén $\mathcal{B}$ definíciója alapján $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, ez is ellentmondás.

5.3. Feladatok.

1. Egy osztály 28 tanulója közül 8-an felvételiznek matematikából, 6-an kémiából, 4 tanuló matematikából és kémiából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem ? Általánosítás.

2. Ha A, B, C tetszőleges véges halmazok, akkor

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Általánosítás.

3. Legyen A egy végtelen halmaz és B egy véges halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ ekvivalens A-val. Speciális esetben, ha $|A| = \aleph_0$, $|B| = n$, akkor $|A \cup B| = \aleph_0$.

4. Megszámlálható-e a $\mathbb{Q}$ halmaz ? Miért ?
5. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}^*$.

Útmutatás. Tekintsük az $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$ függvényt. Igazoljuk, hogy f bijektív.
6. Igazoljuk, hogy ha A egy megszámlálható halmaz, akkor A-nak van olyan valódi részhalmaza, amely ekvivalens A-val.
7. Legyenek A és B véges halmazok, $|A| = k$, $|B| = n$.

a) Hány $f : A \to B$ függvény van ? Válasz: n^k.

b) Hány $f : A \to B$ injektív függvény van ? Válasz: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$.

c) Ha $k = n$, akkor hány bijektív függvény van ? Válasz: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

6. Kijelentéslogika

6.1. További logikai műveletek. Az 1. szakaszban megadtuk a kijelentések, valamint a következő logikai műveletek definícióit: negáció, diszjunkció, konjunkció, implikáció, ekvivalencia. Ezek közül a negáció egyváltozós művelet, a többi 2-2 változós. További három, gyakrabban használt kétváltozós logikai művelet:

Kizáró diszjunkció (antivalencia, Birkhoff-féle művelet), jele: $p\nabla q$, olvasd: "p kizárja q-t", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül pontosan az egyik igaz.

Köznyelvi példa ennek használatára: "A kapott pénzen vagy egy könyvet vagy egy CD-t vásárolok."

Összeférhetetlenséget kifejező diszjunkció, röviden: **összeférhetetlenség** (Sheffer-féle művelet), jele:$p \mid q$, olvasd:. "p összeférhetetlen q-val", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül legfeljebb az egyik igaz.

Például, "Vagy beszél az ember, vagy eszik."

"Sem-sem" művelet (Webb-féle művelet), jele: $p \mid\mid q$, olvasd:. "Sem p, sem q", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül az egyik sem igaz.

Például, "Sem ma, sem holnap nem érek rá."

Táblázat segítségével az előbbi definíciók a következők:

p	q	$p\nabla q$	$p \mid q$	$p \mid\mid q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

Tétel. Az eddigi logikai műveletek mind kifejezhetők a negáció, a diszjunkció és a konjunkció műveletekkel. Pontosabban:

i) $|p \to q| = |\neg p \vee q)|$,

ii) $|p \leftrightarrow q| = |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)|$,

iii) $|p\nabla q| = |(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)|$,

v) $|p \mid q| = |\neg(p \wedge q)|$,

vi) $|p \mid\mid q| = |\neg(p \vee q)|$.

Bizonyítás. Táblázat segítségével, lásd 1. fejezet, Tétel.

Ennél több is igaz. Mivel a diszjunkció illetve a konjunkció megadható a másik művelet segítségével: $|p \vee q| = |\neg(\neg p \wedge \neg q)|$, $|p \wedge q| = |\neg(\neg p \vee \neg q)|$, lásd de Morgan képletek, ezért a definiált műveletek mind megadhatók a negáció és a diszjunkció (vagy a negáció és a konjunkció) segítségével. Például, az ekvivalencia így:

$$|p \leftrightarrow q| = |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))| =$$

$$= |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)|.$$

Az eddigi logikai műveletek mindegyike, a negációt leszámítva, 2-változós, hiszen 2 különböző kijelentésváltozó szerepel bennük. A negáció 1-változós. Általában egy n különböző kijelentésváltozótól függő n-változós kijelentéslogikai műveletet úgy értelmezünk, hogy megadjuk 2^n soros logikai értéktáblázatát. Következik, hogy összesen 2^{2^n} számú n-változós kijelentéslogikai művelet definiálható. Ha $n = 2$, akkor a 2-változós műveletek száma $2^{2^2} = 16$.

Igaz a következő is:

Tétel. Minden n-változós ($n \geq 1$) kijelentéslogikai művelet kifejezhető a negáció és a konjunkció (diszjunkció) segítségével.

Bizonyítás. Legyen pl. $n = 3$ és határozzuk meg azt a 3-változós A műveletet, amelyre:

p	q	r	A
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	i

Válasszuk ki azokat a sorokat, amelyekre A igaz. Ezekben a sorokban írjuk le a kijelentésváltozókat, ha ezek értéke 1 és negáljuk ezeket, ha ezek értéke 0. Vegyük ezeknek a konjunkcióját, majd az így kapott konjunkcióknak a diszjunkcióját. Azt állítjuk, hogy ez megadja az A-t:

$$A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r). \tag{1}$$

Valóban, jelölje B az (1) jobb oldalát. Tekintsük a táblázat k-adik olyan sorát, amelyre A igaz. Akkor a felírt k-adik zárójel értéke i, a többi h, ezért $|B| = i$. Továbbá minden olyan sorra, ahol A hamis, minden felírt zárójel értéke h, így $|B| = h$. Kapjuk, hogy $B = A$. Továbbá - ahogy már láttuk - a diszjunkció, illetve a konjunkció megadható a másik művelet és a negáció segítségével.

Megjegyzés. Azonosságaink alkalmazásával (1)-et egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$A = [(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \vee [(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) =$$

$$= [(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)] \vee [(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) =$$

$$= (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r), \tag{2}$$

6.2. Kijelentéslogikai formulák. Írjuk fel a következő összetett kijelentésnek a szerkezetét: "Amennyiben Kiss vagy Nagy tanár úr elutazik, a fizika helyett akkor lesz matematika, ha Joó tanár úrnak nincs órája."

Először az elemi kijelentésekre **kijentésváltozó**kat vezetünk be:

p : "Kiss tanár úr elutazik."

q : "Nagy tanár úr elutazik."

r : "A fizika helyett matematika lesz."

s : "Joó tanár úrnak órája van."

Ezután – megállapítva a műveletek sorrendjét – felírjuk a kijelentés szerkezetét:

$$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg s).$$

A kijelentések szerkezetének, ún. durvaszerkezetének így történő felírását **formalizálás**nak, a kapott jelsorozatot (képletet) pedig **formulá**nak nevezzük.

Látható, hogy a durvaszerkezet csupán formális séma, tehát nem használja ki sem a kijelentések tartalmát, sem a belső szerkezetét.

A formulákat nagybetűkkel jelöljük, például:

$$A = (p \vee q) \to (r \leftrightarrow \neg s).$$

Más példa. "Ha 12 osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal." durvaszerkezete $B = (p \wedge q) \to r$, ahol p :"12 osztható 2-vel", q :"12 osztható 3-mal", r :"12 osztható 6-tal".

A kijelentéslogika **szimbólum**ai a következők:

a) a kijelentésváltozók jelei: $p, q, \ldots$,

b) a logikai műveletek jelei: $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$,

c) zárójelpárok: $(,)$, ezek a műveletek hatáskörét, sorrendjét és egyértelműségét biztosítják.

A **kijelentéslogika formulái** így definiálhatók:

1. a kijelentésváltozók jelei formulák,
2. ha A, B formulák, akkor $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ is formulák,
3. minden formula előáll véges sok lépésben az 1. és 2. alakú formulákból.

További példák formulákra: $C = ((p \vee \neg q) \vee r) \to (s \wedge \neg s)$, $D = ((p \to q) \to r) \vee (s \wedge r)$.

Nem formulák például a következők: $p \wedge (q \to \wedge r)$, $(pq \wedge (r \wedge p \neg q)$.

Megjegyzések. A 2.-ben szereplő zárójelpárok akkor lényegesek, ha ezek a formulák nagyobb formulák részeiként szerepelnek. Befejezett formulák esetében a külső zárójelpárok elhagyhatók. Ha azt is jelölni akarjuk, hogy az A formulát a $p_1, \ldots, p_n$ kijelentésváltozókból képeztük, akkor az $A(p_1, \ldots, p_n)$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy B **részformulája** az A kijelentéslogikai formulának, ha B előáll A képzése során.

Példa. $\overline{(p \wedge q) \vee \overline{r}} \to (t \vee p)$ formulának $p \wedge q$, $t \vee p$ részformulái de $p \to (t \vee p)$ nem.

Helyettesítésről beszélünk, ha egy A formulában valamely p kijelentésváltozó vagy R részformula helyére egy C formulát írunk. Jelölés: $A(C/p)$, illetve $A(C/B)$).

Különböző kijelentéseknek lehet egymással azonos a szerkezete. Például, a fenti A formula az alábbi kijelentésnek is a szerkezete:

"Ha TV-t nézek vagy strandolok, akkor a vizsgán csak abban az esetben megyek át, ha nem húzok nehéz tételt."

Ez a formalizálás fordított eljárása: a kijelentésváltozókhoz konkrét kijelentéseket rendelünk. Ekkor azt mondjuk, hogy megadjuk a formula egy **szöveges interpretációját**.

Ha a formulában szereplő kijelentésváltozóknak a logikai értékét adjuk meg, akkor logikai értékekkel adott interpretációról, röviden **interpretáció**ról beszélünk.

A fenti A formula egy interpretációja: $|p| = 1, |q| = 0, |r| = 1, |s| = 0$.

Négy változó esetén az interpretációk száma: $2^4 = 16$. Egy n-változós formulának 2^n számú interpretációja van.

Ha egy A formula valamely interpretációjára $|A| = 1$ (illetve $|A| = 0$), akkor azt mondjuk, hogy a tekintett interpretáció az A-t **igazzá** (illetve **hamissá**) **teszi**.

Az A formulát **kielégíthető**nek (**kielégíthetetlen**nek) nevezzük, ha van (nincs) olyan interpretációja, amely igazzá teszi.

Azonosan igaz formulának vagy **tautológiá**nak nevezünk egy A formulát, ha azt minden interpretáció igazzá teszi, jelölés: $|A| \equiv 1$ vagy $A = \mathbf{1}$ vagy $\models A$.

Egy A formula **azonosan hamis** vagy **kontradikció**, ha azt minden interpretáció hamissá teszi (ez nem más, mint a kielégíthetetlen formula), jelölés : $|A| \equiv 0$ vagy $A = \mathbf{0}$.

A tautológia jelölése tehát **1**, a kontradikció jelölése **0**.

A kielégíthető, de nem azonosan igaz formulákat **kontingens formulá**knak is nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az A és B formulák **egyenértékűek** vagy **logikailag ekvivalensek**, ha $A \leftrightarrow B$ tautológia, azaz $|A \leftrightarrow B| \equiv 1$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$ vagy $|A| \equiv |B|$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az A-ban és B-ben szereplő összes kijelentésváltozó minden interpretációjára $|A| = |B|$.

Példaként vizsgáljuk meg a következő formulákat:

$A = p \wedge \neg p$, $B = q \vee \neg q$, $C = p \to p$, $D = p \to q$, $E = \neg p \vee q$, $F = p \leftrightarrow \neg p$.

Ezek közül B és C tautológia, A és F kontradikció, D és E kontingens formulák. Igaz az is, hogy e párok egyenértékűek.

Tetszőleges A formulára $\overline{A} \vee A$ tautológia és $\overline{A} \wedge A$ kontradikció. Továbbá A tautológia akkor és csak akkor, ha $\overline{A}$ kontradikció.

Matematikai tételekben a logikai ekvivalencia legtöbbször az alábbi formákban jelentkezik: *ha A, akkor B és ha B, akkor A; A elégséges és szükséges feltétele B-nek; B akkor és csak akkor, ha A; B pontosan akkor, ha A; A ekvivalens B-vel.*

Az "A egyenértékű B-vel" egy, a formulák körében értelmezett reláció, jelölés: $A \Leftrightarrow B$, míg az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \leftrightarrow q$, $A \leftrightarrow B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\Leftrightarrow$ reláció egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Bizonyítás. Feladat.

Ha logikailag ekvivalens formulákban a kijelentésváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítjük, akkor ismét logikailag ekvivalens formulákhoz jutunk.

6.3. Normálformák. Ha adott egy kijelentéslogikai formula, akkor elkészíthetjük a hozzátartozó igazságtáblázatot. Tekintsük most a fordított feladatot: adott egy A formulának az igazságtáblázata. Adjuk meg az A formulát! Lásd pl. a 6.1. szakasz végén adott táblázatot. Az ott leírtaknak megfelelően A így adható meg:

$$A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r), \tag{1}$$

amit egyszerűbb alakra hozva:

$$A = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r). \tag{2}$$

Az A formulának (1) és (2) alakjai olyan szerepet töltenek be a kijelentéslogikában, mint a polinomok az algebrában. A-ban a főművelet a diszjunkció, e tagokban konjunkció szerepel, tehát az A formula: konjunkciók diszjunkciója (a polinom: szorzatok összege).

Az ilyen típusú formulákat **diszjunktív normálformák**nak nevezzük. Az (1) formula diszjunkciós tagjaiban konjunkciós tagként mind a három kijelentésvátltozó előfordul, mégpedig vagy negálva, vagy negálatlanul. Az ilyen formulákat **teljes diszjunktív normálformák**nak nevezzük; (2) **nem teljes diszjunktív normálforma**.

Dualizáljuk az (1) formula felírásánál ismertetett eljárásunkat:

$$C = (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \tag{3}$$

Egyszerűbb alakra hozás után ebből a

$$C = (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \tag{4}$$

formula adódik. (3) **teljes konjunktív normálforma**, (4) **nem teljes konjunktív normálforma.**

6.4. Kijelentéslogikai tautológiák. Az alábbiakban felsorolunk néhány ismert tautológiát, amelyek ellenőrzése a logikai értéktáblázatok elkészítésével történik. Figyeljük meg, hogy ezekből visszakapjuk a logikai alapműveletek tulajdonságait, illetve a klasszikus logika néhány alapelvét.

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges logikai formulák, akkor
1) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asszociativitás),
2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (kommutativitás),
3) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ (abszorbció),
4) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (disztributivitás),
5) $A \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow A$, $A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$,
6) $A \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$, $A \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow 1$,
7) $A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (a harmadik kizárásának elve), $A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{0}$ (az ellentmondás elve),
8) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ (de Morgan képletek)
9) $A \wedge A \Leftrightarrow A$, $A \vee A \Leftrightarrow A$ (idempotencia),
10) $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (a kettős tagadás elve),
11) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$,
12) $A \to B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$.
A következő tautológiák következtetéseknél használatosak (ezekre még visszatérünk):
13) $A \to B \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}$ (kontrapozició),
14) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ (szillogizmus, a "szillogizmus" a hagyományos logika elnevezése, olyan következtetés, amelyben legalább két premissza van)
15) $(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$ (premisszák egyesítési és felbontási szabálya),
16) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow B \to (A \to C)$ (premisszák felcserélési szabálya),
17) $(A \to B) \wedge (A \to \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$ (reductio ad absurdum),
18) $A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$ (modus ponens),
19) $(\overline{A} \to B) \wedge (\overline{A} \to \overline{B}) \Rightarrow A$ (indirekt bizonyítás módszere),
20) $((C \vee B) \wedge (C \to A) \wedge (B \to A)) \Rightarrow A$ (esetek elemzése).

6.5. Kijelentéslogikai következtetések. A logika egyik fontos feladata a következtetések vizsgálata. A **következtetések** egy vagy több feltételből, más néven **premisszá**ból, és egy állításból, más néven következményből, vagy **konklúzió**ból állnak.

Nézzük először azt az esetet, amikor 1 premissza van. Azt mondjuk, hogy az A formulából **következik** a B formula (a B formula **következménye** az A formulának), ha az $A \to B$ formula tautológia. Jelölés: $A \Rightarrow B$ vagy $A \models B$. Ez akkor teljesül, ha minden olyan interpretáció, amely az A-t igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi.

Matematikai tételekben ez úgy szokott szerepelni, hogy: *ha A, akkor B; A elégséges feltétele B-nek; csak akkor A, ha B; B szükséges feltétele A-nak.* Például: "Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos."

Az "A-nak következménye B" tehát egy, a formulák körében értelmezett reláció, amelynek jelölése: $A \Rightarrow B$. Ugyanakkor az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \to q$, $A \to B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\models$ reláció
a) reflexív, azaz minden A formulára $A \models A$,
b) tranzitív, azaz minden A, B, C formulára ha $A \models B$ és $B \models C$, akkor $A \models C$,
c) nem szimmetrikus, azaz ha $A \models B$, akkor általában $B \models A$ nem teljesül,
d) minden A, B formulára ha $A \models B$ és $B \models A$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Bizonyítás. Feladat.

Általánosan, nézzük most azt, amikor több premissza van.

Példa.

(1) József Debrecenbe vagy Miskolcra utazik.
(2) József nem Miskolcra utazik.

___

(3) József Debrecenbe utazik.

A premisszák és a konklúzió közé vonalat szokás húzni. Ezt a következtetést helyesnek tartjuk, mert ha (1) és (2) igaz, akkor (3) szükségképpen igaz.

E következtetés szerkezete (**sémá**ja):

$$\begin{array}{l} (1)\ p \vee q \\ (2)\ \neg q \\ \hline (3)\ p \end{array}$$

Ugyancsak helyesnek ítéljük mindazokat a következtetéseket, amelyek a fenti séma interpretációiként adódnak. Eszerint egy következtetés helyessége annak a szerkezetétől és nem a tartalmától függ.

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ premisszáknak **következménye** a B konklúzió (kijelentéslogikai értelemben), ha minden olyan interpretáció, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mindegyikét igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Jelölés: $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, vagy $A_1, \ldots, A_n \models B$, vagy $\frac{A_1,\ldots,A_n}{B}$.

E definíció alapján az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ premisszák helyettesíthetők az $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ formulával és a következtetési séma helyességére szükséges és elégséges feltételt ad a következő tétel.

Tétel. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formuláknak akkor és csak akkor következménye a B formula, ha $|(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B| \equiv 1$.

Tehát $n = 1$-re visszakapjuk a korábbi következményfogalmat.

Azt mondjuk, hogy egy következtetés **helyes**, ha a sémája helyes.

6.6. Következtetési sémák. Néhány egyszerű, gyakran előforduló következtetési séma (ezek a hagyományos - arisztotelészi - logika következtetési sémái) :

Tétel.

1. $$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$ leválasztási szabály (modus ponens) ;

2. $$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$ az indirekt bizonyítás sémája (modus tollens) ;

3. $$\begin{array}{l} A \to B \\ A \to \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$ redukció ad abszurdum (a lehetetlenre való visszavezetés) sémája;

4. $$\begin{array}{l} A \to B \\ \hline \neg B \to \neg A \end{array}$$ kontrapoziciós következtetési séma;

5. $$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$ diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens);

6.
$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to C\end{array}}{A \to C}$$
láncszabály vagy feltételes szillogizmus.

Bizonyítás. A definíció alapján, lásd a 6.7. szakaszt.
További tulajdonságok :

- Tautológiának csak tautológia lehet következménye.
- Tautológia bármilyen formulának következménye.
- Kontradikciónak bármilyen formula következménye.
- Kontradikció csak kontradikciónak lehet következménye.
- $A \Rightarrow A$ (reflexívitás)
- Ha $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_j$ (minden $j = 1, \dots, m$ esetén) és $B_1, \dots, B_m \Rightarrow C$, akkor $A_1, \dots, A_n \Rightarrow C$ (tranzitívitás).
- Ha $A_1 \Rightarrow A_2$, ... ,$A_{n-1} \Rightarrow A_n$, és $A_n \Rightarrow A_1$, akkor $A_1, \dots, A_n$ formulák ekvivalensek (ciklikus bizonyítás).

6.7. Következtetések vizsgálata. Az alábbiakban bemutatunk néhány, a következtetések helyességének eldöntésére alkalmas módszert.

1. Alkalmazzuk a definíciót, készítsünk értéktáblázatot (a példa legyen a diszjunktív szillogizmus):

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
i	i	i	h	i
i	h	i	i	i
h	i	i	h	h
h	h	h	i	h

A második sorban (és csak ebben) igaz mind a két premissza és e sorban igaz a konklúzió is, a következtetés tehát helyes.

2. Bizonyítsuk be a leválasztási szabály helyességét. A definíció helyett alkalmazhatjuk a fenti Tételt. Értéktáblázattal megmutatjuk, hogy $|((p \to q) \wedge p) \to q| \equiv 1$.

3. Tegyük fel, hogy létezik olyan interpretáció, amely a premisszákat igazzá, a konklúziót hamissá teszi. Ha ellentmondásra jutunk (azaz, ha nem létezik a feltételezett interpretáció), akkor a következtetés helyes; ha nem jutunk ellentmondásra (azaz, ha találunk ilyen interpretációt), akkor a következtetés helytelen. Példaként tekintsük a láncszabályt:

Ha $|p \to q| = 1$, $|q \to r| = 1$ és $|p \to r| = 0$, akkor ez utóbbiból $|p| = 1, |r| = 0$, ahonnan az első feltételből $|q| = 1$, a másodikból pedig $|q| = 0$, ami ellentmondás, tehát a következtetés helyes.

Sok esetben, például matematikai tételek bizonyításánál, az adott következtetési séma helyett vele ekvivalens sémák helyességét igazolhatjuk könnyebben. Aszerint, hogy milyen ekvivalens sémákat cserélünk ki, különböző bizonyítási módszerekről beszélhetünk. A megfelelő sémák ekvivalenciáját pl. táblázatok segítségével láthatjuk be.

(1) **Feltételes bizonyítás**ról beszélünk, amikor az $A \Rightarrow (B \to C)$ sémát a vele ekvivalens $A, B \Rightarrow C$ sémával helyettesítjük.
Valóban, ez táblázattal igazolható vagy a korábbi műveleti tulajdonságok szerint így:
$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C.$$

(2) **Kontrapozíciós bizonyítás**ról beszélünk, amikor az $A, B \Rightarrow C$ sémát a vele ekvivalens $A, \overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ sémával helyettesítjük.

Valóban, ez táblázattal igazolható vagy így:

$$(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B \Leftrightarrow (A \wedge \neg C) \to \neg B.$$

(3) **Indirekt bizonyítás** esetén az $A \Rightarrow B$ alakú séma helyett az $A \wedge \overline{B}$ formuláról mutatjuk meg, hogy kontradikció.

Igazoljuk ezt!

A kijelentéslogikában minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem, pl. a táblázat elkészítésével. Így kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

6.8. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha p, q tetszőleges kijelentések, akkor
i) $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$ ii) $|(p \to q) \wedge (q \to p)| = |p \leftrightarrow q|$.

2. Adjuk meg táblázattal mind a 16 kétváltozós logikai műveletet. Keressük meg közöttük a tanultakat.

3. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő formulákat:
i) $A = \neg(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ ii) $B = \neg((p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge r) \vee \neg(p \ \vee \neg q)$.

4. Állapítsuk meg, hogy tautológiák-e a következő formulák:
$A_1 = (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$, $A_2 = ((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$.

5. Egy papiron az alábbi száz kijelentő mondat olvasható:
1. Ezen a papiron pontosan egy kijelentés hamis.
2. Ezen a papiron pontosan két kijelentés hamis.
....
100. Ezen a papiron pontosan száz kijelentés hamis.
(A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a száz kijelentő mondatot.)

Kijelentések-e a fenti kijelentő mondatok? Amennyiben igen, mi a logikai értékük?

Megoldás. Az adott mondatok egymásnak ellentmondanak, ezért ha kijelentések, akkor közülük legfeljebb egy lehet igaz. Ha 1. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond az 1. állításának. Ha 2. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond a 2. állításának, stb. Csak az lehetséges, hogy a 99. állítás igaz és a többi mind hamis.

6. Formalizáljuk (írjuk fel képlettel) a következőket:
$A =$ "Színházba vagy moziba megyek, vagy sem színházba sem moziba nem megyek."
$B =$ " Minden nullára végződő szám páros, és minden nullára végződő szám osztható 4-gyel. "

Igaz-e a B állítás ?

7. Formalizáljuk a következőket:
$C =$ " János akkor és csak akkor mérges, ha testvére akkor vitatkozik vele, ha ő siet."
$D=$ " Nem szeretek kirándulni, ha fúj a szél és nem süt a nap, vagy hideg az idő."
$E =$ " Lehetetlen, hogy állásod van, kereseted meg nincs."
$F =$ " Ha az ellenállás növekszik és a feszültség állandó, akkor az áramerősség csökken."

8. Helyes-e az alábbi következtetés ?

$(p \wedge q) \leftrightarrow r$

$r \leftrightarrow s$

$\neg(p \rightarrow s)$

$q \rightarrow s$

9. Helyes-e az alábbi következtetés ?

$(q \vee p) \rightarrow r$

$r \rightarrow (t \vee s)$

$s \rightarrow u$

$\neg t \rightarrow \neg u$

---

q

10. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Ha a motor működik, akkor – amennyiben az akkumulátor nincs kimerülve – a jelzőlámpa ég.

(2) Ha az akkumulátor kimerült, akkor a motor nem működik.

(3) Ha a jelzőlámpa ég, akkor a motor működik.

Ha az akkumulátor nincs kimerülve, akkor a motor működik és a jelzőlámpa ég.

11. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Ha Lajos nem érkezik meg idejében, vagy nem hoz magával példatárat, akkor nem tudjuk megoldani az algebra feladatokat, vagy csak nagyon nehezen.

(2) Ha Lajos nem hoz példatárat, vagy nem tudjuk megoldani az algebra feladatokat, akkor Béla ideges lesz.

(3) Lajos megérkezik idejében, Béla pedig nem lesz ideges.

Meg tudjuk oldani az algebra feladatokat.

Milyen további konkluziókat vonhatunk még le ?

12. Adjunk meg egy olyan A logikai formulát, melynek értéktáblázata:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

13. Adjunk meg egy olyan B logikai formulát, melynek értéktáblázata:

p	q	r	B
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

7. PREDIKÁTUMLOGIKA

7.1. Durvaszerkezet és finomszerkezet. Tekintsük az alábbi következtetést:

A_1: A paralelogramma átlói felezik egymást.
A_2: A négyzet paralelogramma.

B: A négyzet átlói felezik egymást.

Írjuk fel ennek a sémáját. Az A_1, A_2, B állításokat nem tudjuk felbontani a kijelentéslogika műveletei szerint és a séma a következő :

$A_1 : p$
$A_2 : q$

$B : r$

Ez helytelen következtetés a kijelentéslogikában tanultak szerint, mert p, q, r egymástól függetlenek és vehető $|p| = 1, |q| = 1, |r| = 0$.

Ugyanakkor ezt a következtetést helyesnek érezzük. A magyarázat az, hogy a kijelentéslogika nem alkalmas az ilyen és hasonló következtetések vizsgálatára.

A kijelentéslogika a kijelentések, állítások ún. **durvaszerkezet**ét tárja fel, ezt vizsgálja, a predikátumlogika pedig az ún. **finomszerkezet**ét a predikátumok és a logikai kvantorok (lásd 1. fejezet) használatával. A lényeges különbség tehát az, hogy a kijelentéslogikában nem szerepelnek predikátumok és logikai kvantorok, a predikátumlogikában viszont igen.

Látni fogjuk, hogy a predikátumlogikában a fenti következtetés helyessé válik.

Egy kijelentés **predikátumlogikai formalizálás**án a kijelentés szerkezetének (finomszerkezetének) felírását értjük, elemi (tovább már nem bontható) kijelentések, kvantorok és predikátumlogikai műveletek segítségével.

Példa. A fenti kijelentések így formalizálhatók: tekintsük a következő egyváltozós predikátumokat a síkbeli x négyszögek halmazán,

$P(x)$: "x paralelogramma."
$F(x)$: "x átlói felezik egymást."
$N(x)$: "x négyzet."
Ekkor
$A_1 : \forall x(P(x) \to F(x))$
$A_2 : \forall x(N(x) \to P(x))$
$B : \forall x(N(x) \to F(x))$

Más példák. i) "A 4 osztja a 12-t." kijelentés elemi, azaz felbonthatatlan a kijelentéslogikában. Azonban a természetes számok oszthatósági fogalmát ismerve így is átfogalmazható: "Létezik olyan x természetes szám, hogy $4x = 12$". Vagyis a finomszerkezete $\exists x\ P(x)$, ahol $P(x)$: "$4x = 12$" egy 1-változós predikátum az $\mathbb{N}$ halmazon.

ii) "Minden szabályos sokszög húrsokszög, de van olyan húrsokszög, amely nem szabályos sokszög."

A kijelentést először átfogalmazzuk: "Minden sokszögre igaz az, hogy ha szabályos sokszög, akkor húrsokszög, és van olyan sokszög, amely húrsokszög és nem szabályos sokszög." Legyen: $Hx := x$ húrsokszög, $Sx := x$ szabályos sokszög, ahol az individuumtartomány a sokszögek halmaza. Kapjuk, hogy:

$$\forall x(Sx \to Hx) \wedge \exists x(Hx \wedge \neg Sx).$$

iii) Az "Antal tanul" kijelentés finomszerkezete: $Q(a)$, ahol $Q(x)$: "x tanul" egy 1-változós predikátum személyek egy S halmazán. Itt Antal egy **individuum**, ennek jelölése a.

iv) A "Bea haragszik Cilire." kijelentést vizsgálva legyen $H(x,y)$: "x haragszik y-ra" 2-változós predikátum, jelölés még Hxy, és legyenek b (Bea) c (Cili) individuumok, ekkor a szerkezet: $H(c,d)$, vagy Hcd. Az x-et és y-t **individuumváltozó**knak nevezzük. Az **individuumtartomány** az a halmaz, amelyiken a predikátum definiált.

Ha egy predikátumban valamely individuumváltozó helyébe konkrét individuumnevet írunk, akkor **konkretizáció**ról beszélünk.

Vezessük be még a $d :=$ Dezső, $e :=$ Elemér individuumneveket. A $Hxy := x$ haragszik y-ra predikátum konkretizációiként kapjuk:

(1) $Hxe := x$ haragszik Elemérre,

(2) $Hde :=$ Dezső haragszik Elemérre.

Konkretizáció során a predikátum argumentumszáma (változószáma) csökken. Az (1) mondat egyargumentumú, a második nullaargumentumú", azaz kijelentés. Szokás az egy- és többargumentumú predikátumokat **nyitott mondatok**nak, a kijelentéseket **zárt mondatok**nak is nevezni.

Ha egy predikátumban valamely individuumváltozó helyébe egy másik individuumváltozót írunk, akkor **átjelölés**ről beszélünk.

Például, a Hxy predikátumból átjelöléssel a következő predikátumokat kaphatjuk:

(3) $Hxz = x$ haragszik z-re,

(4) $Hyx = y$ haragszik x-re,

(5) $Hyy = y$ haragszik önmagára.

Átjelölés során az argumentumszám vagy változatlan marad, vagy csökken.

Predikátumból kijelentést konkretizációval képeztünk. Erre egy másik lehetőség a **kvantifikáció**, azaz a logikai kvantorok használata. Például:

(6) $\forall x Hxy =$ Mindenki haragszik y-ra.

A kvantor itt az x individuumváltozót lekötötte, ezzel egyargumentumú lett a predikátum, amelyben x-et **kötött**, y-t **szabad individuumváltozó**nak nevezzük. Újabb kvantifikációval y-t is leköthetjük:

(7) $\exists y \forall x Hxy =$ Valakire mindenki haragszik.

Ez már kijelentés.

7.2. Predikátumlogikai formulák. A **predikátumlogikai formulá**k a következőképpen adhatók meg:

1. a kijelentésváltozók formulák,
2. ha P egy n-változós predikátum és $x_1, x_2, \dots, x_n$ individuumváltozók vagy individuumnevek, akkor $Px_1x_2\dots x_n$ és $x_1 \equiv x_2$ formulák,
3. ha A és B formulák, akkor $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ is formulák,
4. ha A egy formula és x egy individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is formulák,
5. más jelsorozat nem formula.

Itt $x_1 \equiv x_2$, olvasd "x_1 azonos x_2-vel" az **azonosságpredikátum**, amely egy 2-változós predikátum, de ennek kitüntetett szerepe van.

Figyeljük meg, hogy a 2. és 4. pontok elhagyásával a kijelentéslogikai formula definíciója adódik.

Ilyen formula például

$$A = \forall x(Sx \rightarrow Hx) \wedge \exists x(Hx \wedge \neg Sx),$$

lásd a fenti ii) Példát.

Most nézzük a **predikátumlogikai interpretáció**t. Adjuk meg például a

$$B = (Pa \wedge \neg Qa) \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

formulának egy interpretációját. Legyen az individuumtartomány a valós számsorozatok $\mathcal{S}$ halmaza. A Px és Qx predikátumváltozóknak konkrét predikátumokat feleltetünk meg: Px-nek az "x korlátos sorozat", Qx-nek az "x konvergens sorozat" predikátumokat, az a-hoz pedig $\mathcal{S}$-nek az $a_n = (-1)^n$ elemét rendeljük. Ezek után a formula egy szöveges interpretációja így hangzik: "Ha az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens, akkor létezik olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens."

E példából is kiderül, hogy egy predikátumlogikai formula interpretálása lényegesen bonyolultabb egy kijelentéslogikai formula interpretálásánál. Az individuumtartomány különféle megválasztása, a predikátumváltozók jelentésének megadása más-más interpretációt eredményez.

7.3. Következtetések a predikátumlogikában

A predikátumlogika következményrelációjának definíciója azonos a kijelentéslogikában kimondott definícióval, de itt formulán predikátumlogikai formulát, interpretáción pedig predikátumlogikai interpretációt kell érteni.

Példák. I.

(1) Minden differenciálható függvény folytonos.
(2) Az $x \rightarrow [x]$ függvény nem folytonos.

---

(3) Az $x \rightarrow [x]$ függvény nem differenciálható.

Egy alkalmas individuumtartomány: $I :=$\{valós függvények \}. A predikátumokra és az individuumra jelöléseket vezetünk be, majd felírjuk a következtetés sémáját.

$Dx := x$ differenciálható	(1) $\forall x(Dx \rightarrow Fx)$
$Fx := x$ folytonos	(2) $\neg Fe$
$e := x \rightarrow [x]$	(3) $\neg De$

Tekintsük mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazzá teszik:

(1) $|\forall x(Dx \rightarrow Fx)| = 1$
(2) $|\neg Fe| = 1$.

Belátjuk, hogy ezek az interpretációk igazzá teszik a konklúziót is. (1)-ből $|De \rightarrow Fe| = 1$, (2)-ből $|Fe| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|De| = 0$, ahonnan $|\neg De| = 1$. Tehát a következtetés helyes.

II. Tekintsük a fejezet elején megadott

$A_1 : \forall x(P(x) \rightarrow F(x))$
$A_2 : \forall x(N(x) \rightarrow P(x))$

$B : \forall x(N(x) \rightarrow F(x))$
következtetést.

Tegyük fel, hogy az A_1, A_2 premisszák igazak és a B konklúzió hamis. Akkor $|\forall x(N(x) \rightarrow F(x))| = 0$, innen $|\neg\forall x(N(x) \rightarrow F(x))| = 1$, $|\exists x\neg(N(x) \rightarrow F(x))| = 1$ és legyen a olyan, hogy $|\neg(N(a) \rightarrow F(a))| = 1$, azaz $|N(a) \rightarrow F(a)| = 0$, innen $|N(a)| = 1$, $|F(a)| = 0$.

Akkor erre az a individuumra $|P(a) \rightarrow F(a)| = 1$, $|(N(a) \rightarrow P(a)| = 1$ és kapjuk, hogy $|P(a)| = 0$, ugyanakkor $|P(a)| = 1$, ami ellentmondás. Tehát a következtetés helyes.

III. Helyes-e az alábbi következtetés ?
(1) Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.
(2) Az $n = 13$ szám páratlan.

---

(3) Az $n = 13$ szám prímszám.

Itt a (3) konklúzió persze igaz, de az a kérdés, hogy (3) következménye-e (1)-nek és (2)-nek. Legyen az individuumtartomány $I = \{3, 4, 5, ...\}$, $a = 13$ és $P(x)$: "x prím", $Q(x)$: "x páratlan". Ekkor a séma:
$A_1 : \forall x(P(x) \to Q(x))$
$A_2 : Q(a)$

$B : P(a)$
Ez a következtetés nem helyes, mert más interpretáció esetén a konklúzió hamissá válhat. Pl. $a = 15$-re a konklúzió hamis.

IV. Vizsgáljuk az alábbi következtetést:
(1) Japán a felkelő nap országa.
(2) Japán távol-keleti ország.

---

(3) A felkelő nap országa távol-keleti ország.

Ezt helyesnek ítéljük. Legyen $Tx = x$ távol-keleti ország, j=Japán, f=a felkelő nap országa. Az (1) premissza pontosabban ezt állítja: Japán azonos a felkelő nap országával. Ha ezt a kijelentést a Pxy predikátummal írjuk le, akkor a séma:
(1) Pjf
(2) Tj

---

(3) Tf
Ez pedig nem helyes, mert az alábbi következtetésnek ugyanez a szerkezete:
(1) 3 osztója 6-nak
(2) 3 páratlan

---

(3) 6 páratlan,
és ez nyilván nem helyes.
A Pxy tehát nem lehet tetszőleges predikátum, csak az azonosság-predikátum. Ekkor a séma:
(1) $j = f$
(2) Tj

---

(3) Tf
Ez pedig nyilván helyes.
A predikátumlogikai következtetések vizsgálatánál hasznos a szóban forgó predikátumok igazsághalmazainak ábrázolása Venn-diagramok segítségével.

Említettük a 6. fejezetben, hogy a kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

A predikátumlogikában más a helyzet. A. Church, 1936-os nevezetes eredménye szerint nem lehet olyan egységes, általános eljárást adni, amelynek segítségével minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem. Predikátumlogikában nem lehet általános eldöntési eljárást adni.

7.4. Feladatok

1. Az $Fxy := x$ figyeli y-t predikátum és az $a :=$ Anna, $b :=$ Béla individuumnevek felhasználásával írjuk le a következő kijelentések ill. predikátumok szerkezetét:

a) Béla Annát figyeli.
b) x mindenkit figyel.
c) x-et mindenki figyeli.
d) Valaki figyeli x-et, x pedig y-t.
e) Mindenki mindekire figyel.
f) Valaki mindenkit figyel.
g) Mindenki figyel valakit.
h) Bélát valaki figyeli.
j) Valakit mindenki figyel.

Állapítsuk meg, hogy az egyes predikátumok hány argumentumúak.

2. A $Kxy := x$ kezet fogott y-nal predikátum és az azonosságpredikátum felhasználásával formalizáljuk az alábbi logikai függvényeket ill. kijelentéseket:

a) x kezet fogott mindenki mással.
b) Mindenki mindenki mással kezet fogott.
c) Valaki mindenki mással kezet fogott.
d) Mindenki kezet fogott valaki mással.
e) Valaki valaki mással kezet fogott.

3. Formalizáljuk a következő kijelentéseket:

a) Bármely konvergens sorozat korlátos.
b) A korlátos monoton sorozatok konvergensek.
c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
d) A 0-ra végződő számok párosak.
e) Nincsenek páratlan tökéletes számok.
f) Találhatók milliónál nagyobb ikerprímek is.
g) Léteznek olyan sokszögek, amelyek egyenlő oldalúak, de nem szabályosak.
h) A derékszögű rombuszok a négyzetek.

4. A vizsgaidőszak valamely időpontjban aktuálissá válnak a következő kijelentéspárok:

a) Mindenki vizsgázott analízisből és algebrából.
Mindenki vizsgzott analízisből, és mindenki algebrából is.
b) Mindenki vizsgázott analízisből vagy algebrából.
Mindenki vizsgzott analízisből, vagy mindenki algebrából.
c) Vannak, akik analízisből is, algebrából is vizsgáztak.
Vannak, akik analízisből, s vannak akik algebrából vizsgáztak.
d) Vannak, akik analízisből vagy algebrából vizsgáztak.
Vannak, akik analízisből, vagy vannak, akik algebrából vizsgáztak.

Formalizáljuk a kijelentéseket. Melyek azok a kijelentéspárok, amelyek ekvivalensek? A nem ekvivalenseket írjuk fel implikációval!

5. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1) Minden konvergens sorozat korlátos.
(2) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem korlátos.

---

(3) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem konvergens.

Megoldás. A következtetés sémája:

(1) $\forall x : (C(x) \to B(x))$
(2) $\neg B(e)$

---

(3) $\neg C(e)$

Ez a következtetés helyes. Tekintsük ugyanis mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazzá teszik:

(1) $|\forall x : (C(x) \to B(x))| = 1$
(2) $|\neg B(e)| = 1$.

(1)-ből $|C(e) \to B(e)| = 1$, (2)-ből $|B(e)| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|C(e)| = 0$, ahonnan $|\neg C(e)| = 1$.

6. Helyes-e az alábbi következtetés ?

(1)Minden differenciálható függvény folytonos.
(2) Van olyan racionális törtfüggvény, amely differenciálható.

---

(3) Van olyan racionális törtfüggvény, amely folytonos.

További irodalom

1. Klukovics Lajos, Bevezető fejezetek a matematikába, egyet. jegyzet, JATE Kiadó, Szeged, 1989.

2. Szendrei Ágnes, Diszkrét matematika, Polygon, Szeged, 2000.

3. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

4. Szendrei János, Tóth Balázs, Bevezetés a matematikai logikába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1996.