A MATEMATIKA ALAPJAI

Dr. Tóth László

Pécsi Tudományegyetem, 2005

Bevezetés

• Halmazelmélet és matematikai logika

• Halmazelmélet: nem rendezett halmazok elmélete (számosságok), rendezett és jólrendezett halmazok elmélete (rendtípusok és rendszámok)

• Matematikai logika: kijelentéskalkulus (ítéletkalkulus), predikátumkalkulus (elsőrendű logika), magasabbrendű nyelvek

• Georg Cantor (1945-1918) a halmazelmélet megteremtője

• Naiv halmazelmélet: alapfogalmak (definiálatlan fogalmak): a halmaz, az elem és az elemnek a halmazhoz való hozzátartozása, ezeket használva vezethetők be az újabb, immár definiált fogalmak, mint például a halmazok uniója és metszete, vagy a reláció fogalma.

• Ennek a szemléletes elméletnek bizonyos korlátai vannak. Erre már a XIX.-XX. század fordulóján rádöbbentek a matematikusok, amikor bizonyos ellentmondásokra, ún. halmazelméleti paradoxonokra vagy antinómiákra találtak. Ez felvetette a halmazelmélet axiomatizálásának a gondolatát.

• A felállított különböző axiomatikus megalapozások fontos közös vonása: megadni azokat az eljárásokat, amelyek segítségével adott halmazokból új halmazok képezhetők. A paradoxonok fellépésének oka ugyanis éppen az, hogy a naiv halmazelmélet nem tisztázza: adott halmazokból kiindulva milyen eljárásokkal szerkeszthetünk újabb halmazokat.

• **Tétel.** Nincs olyan halmaz, amely minden halmazt elemként tartalmaz (a "halmazok halmaza" ellentmondásos fogalom).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen $\mathcal{A}$ halmaz. Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : A \notin A\},$$

amely az összes olyan halmazból áll, amely nem eleme önmagának. Nézzük meg, hogy $\mathcal{B}$ eleme-e önmagának vagy sem.

1. Ha $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{B}$ definíciója miatt $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$, ami ellentmondás.
2. Ha $\mathcal{B} \notin \mathcal{B}$, akkor szintén $\mathcal{B}$ definíciója alapján $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, ez is ellentmondás. □

• Richard-féle antinómia

• Axiómarendszerek: E. Zermelo (1871-1953), A. Fraenkel (1891-1965), Neumann János (1903-1957)

• Zermelo-Fraenkel axiómarendszer (ZF rendszer)

• Ezekben egy halmazt nem akkor tekintünk létezőnek, ha megmondjuk, hogy melyek az elemei, hanem csak akkor, ha létezése az axiómákból logikailag levezethető.

• Az axiomatikus felépítéshez szükség van matematikai logikai ismeretekre (elsőrendű logika, formális nyelvek).

• Az axiomatikus halmazelméletben ellentmondások még nem jelentkeztek (kérdés, hogy vannak-e ?)

• K. Gödel (1906-1978) tételei:

1. tétel: egy elegendően gazdag, konzisztens (azaz ellentmondásmentes) ún. elsőrendű elmélet tartalmaz benne eldönthetetlen állításokat.

2. tétel: egy elegendően gazdag, konzisztens elsőrendű elmélet konzisztenciája nem bizonyítható olyan módszerekkel, amelyek kifejezhetők benne.

• Innen következik, hogy ZF-ben nem bizonyítható ZF ellentmondástalansága.

• Pl. a matematikai analízis szokásos felépítése a naiv halmazelméletre támszkodik, de ennek csak azt a részét alkalmazza, amely nem vezet a jelzett ellentmondásokra, ez a rész következik az axiómarendszerekből (pl. a ZF rendszerből).

• A matematikai logika célul tűzte ki a matematika egyes fejezetei ellentmondástalanságának a vizsgálatát.

Irodalom

1. Hajnal András, Hamburger Péter, Halmazelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
2. P. R. Halmos, Elemi halmazelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
3. Kalmár László, A matematika alapjai I.-II., egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, 1970.
4. Klukovics Lajos, Bevezető fejezetek a matematikába, egyet. jegyzet, JATE Kiadó, Szeged, 1989.
5. Maurer Gyula, Virág Imre, Bevezetés a struktúrák elméletébe, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1976.
6. R. R. Stoll, Sets, Logic and Axiomatic Theories, W. H. Freemann, 1974.
7. Szendrei János, Algebra és számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
8. Szendrei János, Tóth Balázs, Bevezetés a matematikai logikába, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1996.

1. Logikai alapfogalmak

1.1. Kijelentések. A **kijelentés** (**ítélet** vagy **állítás**) olyan jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondat, amely vagy igaz, vagy hamis, de nem lehet egyidőben igaz is és hamis is. Jelölés: $p, q, r, ..., x, y, z, ...$, ezeket **kijelentésváltozó**knak nevezzük. Például,

p: "A 17 prímszám." igaz kijelentés,

q: "14 osztható 4-gyel." hamis kijelentés,

r: "Minden 2-nél nagyobb páros szám két prímszám összege." kijelentés, amelyről jelenlegi ismereteink alapján nem tudjuk eldönteni, hogy igaz vagy hamis (Goldbach-sejtés).

A "Szép idő van." mondat nem kijelentés, mert nem egyértelmű, hogy milyen földrajzi területre, milyen időintervallumra vonatkozik az állítás, stb., és emiatt nem allapítható meg, hogy igaz vagy hamis, illetve ennek eldöntéséhez további információkra lenne szükség.

Nem kijelentések a kérdő és a felkiáltó mondatok és nem tekintjük kijelentéseknek a definíciókat sem. Például, az "Egy 2-vel osztható egész számot páros számnak nevezünk." mondat nem kijelentés, de "Minden páros szám osztható 2-vel." egy igaz kijelentés.

A "Most nem mondok igazat." mondat nem kijelentés, mert ellentmondásos, ha ugyanis ez igaz lenne, akkor nem mondanék igazat, tehát mégsem lenne igaz, ha pedig az állítás hamis lenne, akkor igazat mondanék, tehát az állítás igaz lenne.

Az "igaz" illetve "hamis" a kijelentés **logikai érték**e vagy **igazságértéke**, ezeket a továbbiakban 1 (vagy i), illetve 0 (vagy h) jelöli. Ha p egy adott kijelentés, akkor ennek logikai értékét $|p|$ jelöli, így a fenti kijelentésekre $|p| = 1, |q| = 0$.

Megjegyzések. a) A kijelentés és a kijelentés logikai értéke fenti megadása nem matematikai definíció.

b) Annak eldöntése, hogy egy kijelentő mondat kijelentés-e, és hogy ez esetben mi a logikai értéke, nem a logika feladata. Ez konkrét tapasztalattal, vagy valamely szaktudomány eredményeivel dönthető el, vagy bizonyos esetekben megállapodás kérdése.

c) Már az ókorban Arisztotelész görög filozófus, a logika atyja, megfogalmazta a következő törvényeket:

- Az ellentmondástalanság törvénye: egy kijelentés logikai értéke nem lehet egyidejűleg igaz is és hamis is.

- A kizárt harmadik törvénye: egy kijelentés logikai értéke vagy igaz vagy hamis, harmadik lehetőség nincs.

d) Léteznek az ún. többértékű logikák is, ezekkel mi nem foglalkozunk.

1.2. Műveletek kijelentésekkel. Kijelentésekből újabb, ún. **összetett kijelentések**et képezhetünk az alábbi **logikai alapműveletek** segítségével. Ezek a következők:

1) **Negáció**: A p kijelentés negációja (tagadása) a "Nem p" kijelentés, jele $\neg p$ vagy $\bar{p}$, amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Így $|\neg p| = 1 - |p|$. Táblázattal

p	$\neg p$
0	1
1	0

Például, a p: "A 17 prímszám." kijelentés negációja a $\neg p$: "Nem teljesül, hogy a 17 prímszám." kijelentés, mely így is mondható: $\neg p$: "A 17 nem prímszám." Ez hamis.

2) **Konjunkció** ("logikai és" művelet): A p, q kijelentések konjunkciója a "p és q" kijelentés, jele $p \wedge q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül mindkettő igaz.

A fenti p, q kijelentések konjunkciója a $p \wedge q$: "A 17 prímszám és 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely hamis.

Ez, akárcsak a negáció esetén, megfelel a köznapi használatnak. A köznyelvben az "és" kötőszó helyett állhat például "de", "noha", "bár", "viszont", stb. Ezek hangulatilag befolyásolják az összetett kijelentést, de logikai érték szempontjából nem. Például: "A 10 osztható 2-vel is, 5-tel is.", "A barátom jól vizsgázott, bár nem tanult.", stb.

3) **Diszjunkció** ("logikai vagy"): A p, q kijelentések diszjunkciója a "p vagy q" kijelentés, jele $p \vee q$, mely akkor és csak akkor igaz, ha p, q közül legalább az egyik igaz.

Például, a fenti p, q kijelentések diszjunkciója a $p \vee q$: "A 17 prímszám vagy 14 osztható 4-gyel." kijelentés, amely igaz.

Itt a "vagy" kötőszót nem kizáró értelemben használjuk, helyette ez is mondható: "a kettő közül legalább az egyik esetben". A köznyelvben gyakran a "kizáró vagy"-ot használjuk: "Éva ma este színházba vagy moziba megy". Van még az ún. "összeférhetetlen vagy", pl. "A gyorsvonat legközelebb Kecskeméten vagy Nagykőrösön áll meg.", lásd 6. fejezet.

4) **Implikáció**: A p, q kijelentések implikációja a "p implikálja q-t" vagy "p-ből következik q" kijelentés, jele $p \to q$, mely akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

A $p \to q$ implikációt a következő alakok bármelyikével is lehet mondani: "q akkor, ha p", "q, feltéve, hogy p", "p elégséges feltétele q-nak".

Itt p az implikáció **előtag**ja, q az implikáció **utótag**ja.

Ez az értelmezés összhangban van a köznyelvi használattal: Egy hallgató a következőt ígéri társának:

"Ha az előadás pontosan fejeződik be, akkor 12-kor a Kossuth-téren leszek."

Igéretét csak abban az esetben nem tartja be, ha az előtag igaz, az utótag pedig hamis.

5) **Ekvivalencia**: A p, q kijelentések ekvivalenciája a "p ekvivalens q-val" vagy "p akkor és csak akkor, ha q" kijelentés, jele $\leftrightarrow$, mely igaz, ha p, q egyidejüleg igaz vagy hamis és hamis, ha p, q közül egyik igaz, a másik hamis, azaz ha $|p| = |q|$.

A $p \leftrightarrow q$ ekvivalenciát a következőképpen is lehet mondani: "q akkor és csak akkor, ha p", vagy "p szükséges és elegséges feltétele q-nak".

A köznyelvben az ekvivalencia ritkán fordul elő, de gyakori a matematikában, például:

"Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével." (Pitágorász-tétel)

Táblázattal megadva a fenti definíciók a következők:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Figyeljük meg, hogy

$|p \vee q| = |p| + |q| + |p| \cdot |q|$, $\quad |p \wedge q| = |p| \cdot |q|$,

$|p \to q| = 1 + |p| + |p| \cdot |q|$, $\quad |p \leftrightarrow q| = 1 + |p| + |q|$, ahol a + és a $\cdot$ modulo 2 értendőek:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Minden kijelentés felbontható olyan kijelentésekre, amelyek már nem tartalmazzák ezeket a műveleteket, s amelyeket **elemi kijelentés**eknek nevezünk.

1.3. Műveleti tulajdonságok.
Tétel. Ha p, q, r tetszőleges kijelentések, akkor igazak a következők.
1) $|\neg\neg p| = |p|$ (a kettős tagadás elve),
A konjunkció és a diszjunkció tulajdonságai:
2)$|(p \wedge q) \wedge r| = |p \wedge (q \wedge r)|, \quad |(p \vee q) \vee r| = |p \vee (q \vee r)|$ (asszociativitás),
3) $|p \wedge q| = |q \wedge p|, \quad |p \vee q| = |q \vee p|$ (kommutativitás),
4) $|p \wedge (p \vee q)| = |p|, \quad |p \vee (p \wedge q)| = |p|$ (abszorbció),
5) $|p \wedge p| = |p|, \quad |p \vee p| = |p|$ (idempotencia),
6) $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|, \quad |p \vee (q \wedge r)| = |(p \vee q) \wedge (p \vee r)|$ (disztributivitás),
A konjunkció és a diszjunkció negációra vonatkozó tulajdonságai:
7) $|p \vee \neg p| = 1, \quad |p \wedge \neg q| = 0$,
8) $|\neg(p \wedge q)| = |\neg p \vee \neg q|, \quad |\neg(p \vee q)| = |\neg p \wedge \neg q|$ (de Morgan képletek),
Az implikációra és az ekvivalenciára vonatkozó tulajdonságok:
9) $|p \to q| = |\neg p \vee q|$,
10) $|p \leftrightarrow q| = |(p \to q) \wedge (q \to p)|$.

Bizonyítás. Táblázatok segítségével bizonyítunk, például a 8) első összefüggését így:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

A táblázat negyedik és utolsó oszlopának azonossága mutatja az összefüggés érvényességét.

Másképp, algebrai műveletekkel, használva a fenti öszefüggéseket: Például 9) így igazolható:

$$|\neg p \vee q| = |\neg p| + |q| + |\neg p| \cdot |q| = 1 - |p| + |q| + (1 - |p|) \cdot |q| =$$

$$= 1 - |p| + |q| + |q| - |p| \cdot |q| = 1 - |p| + 0 - |p| \cdot |q| = 1 + |p| + |p| \cdot |q| = |p \to q|,$$

mert $-|p| = |p|$, azaz $|p| + |p| = 0$ minden p-re (modulo 2).

Megjegyzés. A fenti Tétel tulajdonságait a $|\,|$ jel elhagyásával is írhatjuk, pl. $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$ vagy $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$.

1.4. Predikátumok, műveletek predikátumokkal. Predikátumoknak nevezzük az olyan kijelentő mondatokat, amelyek egy vagy több változótól függenek és amelyek ezen változók minden megengedett rögzített értékeire egy kijelentést adnak.

A változók lehetnek számok vagy valamely halmaz elemei. A változók számától függően beszélünk egyváltozós, kétváltozós,...,n-változós predikátumokról. Jelölés: $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x_1,x_2,...,x_n)$,..., vagy Px, Pxy, $Px_1x_2...x_n$,... .

Például, $P(x,y,z)$: "$x+y=z$" egy 3-változós predikátum, amelyben az x,y,z változók pl. valós számok. Itt $P(2,1,3)$: "$2+1=3$" igaz kijelentés, $P(3,1,2)$: "$3+1=2$" pedig hamis kijelentés. További példák:

$Q(x)$: "$x>0$" és $R(x)$: "$x\leq 0$" egy-egy, a valós számok halmazán értelmezett 1-változós predikátum,

$S(x,y)$: "$x>y$" egy, az egész számok halmazán értelmezett 2-változós predikátum.

Az n-változós predikátumokra vonatkozó alapműveletek a következőképpen adhatók meg:

$\overline{P}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\overline{P(x_1,x_2,\dots,x_n)}$,
$(P\wedge Q)(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(x_1,x_2,\dots,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$,
$(P\vee Q)(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(x_1,x_2,\dots,x_n)\vee Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$,
$(P\to Q)(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(x_1,x_2,\dots,x_n)\to Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$,
$(P\leftrightarrow Q)(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(x_1,x_2,\dots,x_n)\leftrightarrow Q(x_1,x_2,\dots,x_n)$,
ahol a jobb oldalon a kijelentésekre vonatkozó alapműveletek szerepelnek.

Például, a $Q(x)$: "$x>0$" és $R(x)$: "$x\leq 0$" 1-változós predikátumok esetén
$(Q\wedge R)(x)$: "$x>0\wedge x\leq 0$", ez minden valós x-re hamis,
$(Q\vee R)(x)$: "$x>0\vee x\leq 0$", ez minden valós x-re igaz.

Ha P,Q egyváltozós predikátumok és minden megengedett x értékre $|P(x)\to Q(x)|=1$, akkor azt mondjuk, hogy P-ből **következik** Q, vagy Q **következmény**e P-nek, jelölés: $P(x)\Rightarrow Q(x)$ vagy $P\Rightarrow Q$.

Ha minden megengedett x értékre $|P(x)\leftrightarrow Q(x)|=1$, akkor azt mondjuk, hogy P és Q **egyenértékű**ek, vagy **ekvivalens**ek, jelölés: $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ vagy $P\Leftrightarrow Q$.

Például, ha $P(x)$: "$x<1$" és $Q(x)$: "$x\leq 1$" az $\mathbb{R}$ halmazon, akkor $P\Rightarrow Q$. Ha még $S(x)$: "$3x<3$", akkor $P\Leftrightarrow S$.

1.5. Logikai kvantorok. A "minden x-re" kifejezést **univerzális kvantor**nak nevezzzük, jele $\forall x$, olvasd még: "bármely x-re", "tetszőleges x-re".

Legyen $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett egyváltozós predikátum. A $\forall xP(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\forall xP(x)|=\begin{cases}1, & \text{ha minden } a\in A \text{ -ra } |P(a)|=1,\\ 0, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a\in A, \text{ amelyre } |P(a)|=0.\end{cases}$$

Például, ha $P(x)$: "$x^2\geq 0$" az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\forall xP(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha a $Q(x)$: "$x^2>0$" az $\mathbb{R}$-en értelmezett predikátumot tekintjük, akkor $\forall xQ(x)$ hamis kijelentés, mert $x=0$-ra $Q(0)$: "$0^2>0$" hamis kijelentés.

A "van olyan x, hogy" kifejezést **egzisztenciális kvantor**nak nevezzzük, jele $\exists x$, olvasd még: "létezik x úgy, hogy".

Ha $P(x)$ egy, az A halmazon értelmezett predikátum, akkor a $\exists xP(x)$ egy kijelentés, amelynek logikai értéke:

$$|\exists xP(x)|=\begin{cases}0, & \text{ha minden } a\in A \text{ -ra } |P(a)|=0,\\ 1, & \text{másképp, azaz ha van olyan } a\in A, \text{ amelyre } |P(a)|=1.\end{cases}$$

Például, ha $P(x)$: "$x^2-2=0$" az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett predikátum, akkor $\exists xP(x)$ igaz kijelentés. Ugyanakkor, ha $Q(x)$: "$x^2-2=0$" az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán értelmezett predikátum, akkor $\exists x Q(x)$ hamis kijelentés, mert az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet gyökei, a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ nem egész számok.

A következőkben felsorolunk néhány, a bevezetett kvantorokra vonatkozó fontosabb tulajdonságot.

Tétel. Ha $P(x)$ és $Q(x)$ tetszőleges egyváltozós predikátumok, akkor
1) $|\neg(\exists x P(x))| = |\forall x \neg P(x)|, \quad |\neg(\forall x P(x))| = |\exists x \neg P(x)|$,
2) $|\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)| = |\forall x (P(x) \wedge Q(x))|$,
3) $|(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to (\forall x (P(x) \vee Q(x)))| = 1$,
4) $|(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))| = 1$,
5) $|\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)| = |\exists x (P(x) \vee Q(x))|$.

Az 1) tulajdonság szerint a $\exists$ ($\forall$) kvantort úgy negáljuk, hogy helyette a $\forall$ ($\exists$) kvantort írjuk és negáljuk a predikátumot. Például, a

"Van olyan hallgató, aki vizsgázott." negációja "Nincs olyan hallgató, aki vizsgázott.", azaz "Minden hallgató nem vizsgázott." ("Egy hallgató sem vizsgázott.")

" Minden hallgató vizsgázott." negációja: "Nem minden hallgató vizsgázott.", azaz "Van olyan hallgató, aki nem vizsgázott."

Megjegyezzük, hogy a 3) tulajdonságra nézve nem igaz, hogy
$|(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \to (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))| = 1$, azaz nem teljesül, hogy
$|\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)| = |\forall x (P(x) \vee Q(x))|$.

Valóban, legyenek $P(x)$: "$x > 0$" és $Q(x)$: "$x \leq 0$" a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán. Ekkor
$|\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)| = 0$ és $|\forall x (P(x) \vee Q(x))| = 1$.

Hasonlóképpen a 4) tulajdonságra. Szerkesszünk további ellenpéldákat.

1.6. Feladatok.

1. Igazoljuk a 1.3. szakasz Tételének állításait.

2. Igazoljuk, hogy az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

3. A $p \to q$ implikáció **megfordítása** a $q \to p$ implikáció, $p \to q$ **kontrapozíciója** pedig a $\neg q \to \neg p$ implikáció. Igazoljuk, hogy:
a) az implikáció ekvivalens a kontrapozíciójával: $|p \to q| = |\neg q \to \neg p|$,
b) az implikáció megfordítása ekvivalens a megfordítás kontrapozíciójával (a kontrapozíció megfordításával): $|q \to p| = |\neg p \to \neg q|$.

4. Készítsük el a következő formulák értéktáblázatát:
a) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$,
b) $(p \to q) \vee r$,
c) $\neg(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \neg p)$.

5. Állapítsuk meg a következő kijelentések logikai értékét:
a) $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$,
b) $\forall x \in \mathbb{Z}\ Q(x)$,
c) $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$,
d) $\exists x \in \mathbb{Z}\ Q(x)$,
ahol $P(x)$: "$x^3 \geq 0$", $Q(x)$: "$3x^2 + 2 \geq 3$" és $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

2. Halmazok

2.1. Halmazok. A **halmaz** bizonyos jól meghatározott dolgok (tárgyak, fogalmak), a halmaz **elem**einek az összessége. Azt, hogy az a elem **hozzátartozik** az A halmazhoz így jelöljük: $a \in A$ (a eleme A-nak); $b \notin A$ jelentése: b nem eleme A-nak.

Egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei. Egy halmazt megadhatunk úgy, hogy felsoroljuk az elemeit, pl. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x, y, z\}$ vagy úgy, hogy megadunk egy, a halmaz x elemeire jellemző $T(x)$ tulajdonságot: $A = \{x|T(x)\} = \{x : T(x)\}$, pl. $A = \{x|x \in \mathbb{R}$ és $0 \leq x \leq 3\}$.

A számhalmazokra az alábbi jelöléseket használjuk:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ a természetes számok halmaza,

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ a nemnulla természetes számok halmaza,

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ az egész számok halmaza,

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ a racionális számok halmaza,

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

Az üres halmaz (egyetlen eleme sincs) jele: $\emptyset$. Az A és B halmazokat egyenlőknek nevezzük, ha ugyanazok az elemei, jel. $A = B$.

Az A halmaz **részhalmaz**a a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme, jel. $A \subseteq B$.

Jegyezzük meg, hogy $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a vizsgált halmazok részhalmazai egy U ún. **alaphalmaz**nak (univerzumnak). Az előzék szerint az A és B halmazok egyenlőek, ha $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, itt $P(x) : x \in A$ és $Q(x) : x \in B$ az U halmazon definiált predikátumok. Gyakran ezt így írjuk: $\forall x \in U(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha $x \in A \Rightarrow x \in B$, azaz $\forall x \in U(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

2.2. Műveletek halmazokkal. Az A és B halmazok **metszet**e a közös elemek összessége: $A \cap B = \{x|x \in A$ és $x \in B\}$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B **diszjunkt** vagy **idegen halmazok**.

Az A és B halmazok **egyesítés**e vagy **unió**ja azoknak az elemeknek az összessége, amelyek hozzátartoznak legalább az egyik halmazhoz: $A \cup B = \{x|x \in A$ vagy $x \in B\}$.

Az $A \setminus B$ **különbséghalmaz** az A olyan elemeinek a halmaza, melyek nem tartoznak a B-hez: $A \setminus B = \{x|x \in A$ és $x \notin B\}$.

Ha $A \subseteq E$, akkor $E \setminus A$-t az A halmaz E-re vonatkozó **kiegészítő** vagy **komplementer halmaz**ának nevezzük, jelölés: $\complement_E(A)$. Ha E, neve **alaphalmaz**, rögzített, akkor a $\complement(A)$ vagy $\bar{A}$ jelöléseket is használjuk.

Az A és B halmazok **szimmetrikus különbség**e az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmaz.

Figyeljük meg, hogy a metszet műveletet a logikai "és" (konjunkció) művelettel értelmezzük, a halmazok unióját pedig a logikai "vagy" (diszjunkció) művelettel. Hasonló kapcsolat van a komplementer halmaz és a negáció, valamint a szimmetrikus különbség és a "kizáró vagy" között.

2.3. Műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asszociativitás),

2) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás),

3) $A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$ (abszorbció),

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás),

5) $A \cup \complement_E(A) = E, \quad A \cap \complement_E(A) = \emptyset$,

6) $\complement(A \cap B) = \complement(A) \cup \complement(B), \quad \complement(A \cup B) = \complement(A) \cap \complement(B)$ (de Morgan képletek),
7) $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$,
8) $\complement(\complement(A)) = A, \quad A \setminus B = A \cap \complement(B)$.

Bizonyítás. Következnek a logikai műveletekre vonatkozó megfelelő állításokból. Például 6) első képlete így: $x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement(A) \vee x \in \complement(B) \Leftrightarrow x \in \complement(A) \cup \complement(B)$.

Másképp, belátjuk a kétirányú bennfoglalást. Igazoljuk például 3) második képletét: $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ igaz a definíció szerint és $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ is igaz, mert $A \cap B \subseteq A$.

Tétel. (A szimmetrikus különbség tulajdonságai) Ha A, B, C tetszőleges halmazok, akkor
1) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
2) $A\Delta B = B\Delta A$,
3) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$,
4) $A\Delta\emptyset = A, \quad A\Delta A = \emptyset$
5) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Bizonyítás. 3) és 5) kivételével azonnaliak a definíciók alapján. Ez utóbbiakra még visszatérünk.

2.4. Descartes-szorzat, hatványhalmaz. Az A és B halmazok **Descartes-szorzat**ának nevezzük az

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

halmazt. Itt (x, y) **rendezett elempár**t jelöl, ahol lényeges az elemek sorrendje: $(x, y) = (z, t)$ akkor és csak akkor, ha $x = z$ és $y = t$.

Ha A és B elemeinak a száma m, illetve n, akkor $A \times B$ elemeinek a száma mn.

Például, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ esetén $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Általánosan, az $A_1, A_2, ..., A_n$ halmazok **Descartes-szorzat**a az

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}$$

halmaz, ahol $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ún. **rendezett elem n-es**. Ha $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, akkor jelölés: $A \times A \times ... \times A = A^n$.

Például, $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ azonosítható a sík, illetve a tér pontjainak halmazával.

Az A halmaz részhalmazainak az összességét $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$, ez az A **hatványhalmaz**a.

Ha A elemeinek a száma n, akkor a részhalmazok száma 2^n, azaz a hatványhalmaz 2^n elemből áll.

2.5. Predikátumok igazsághalmazai. Az 1.4. szakaszban már definiáltuk az n-változós predikátum fogalmát: az A halmazon értelmezett n-változós predikátum (vagy **logikai függvény**) az A halmaz $x_1, x_2, ..., x_n$ elemeire vonatkozó olyan $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ nyílt kijelentő mondat, amelyre minden rögzített $a_1, a_2, ..., a_n$ esetén $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ egy kijelentés.

A 0-változós predikátumok a kijelentésekkel azonosíthatók.

Ha $P(x_1, x_2, .., x_n)$ egy n-változós predikátum, akkor azoknak az $(a_1, a_2, .., a_n)$ rendezett elem n-eseknek a halmazát, amelyekre $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ igaz a predikátum **igazsághalmazá**nak nevezzük, jelölés: $\mathcal{I}(P)$. Minden predikátumot meghatározza az igazsághalmaza.

Például az $\mathbb{R}$-en adott $P(x, y, z)$: "$x + y = z$" 3-változós predikátum igazsághalmaza az összes $(a, b, a + b)$ alakú rendezett számhármas, ahol a, b valós számok: $\mathcal{I}(P) = \{(a, b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

A $Q(x)$: "$x > 0$" és $R(x)$: "$x \leq 0$" 1-változós predikátumok igazsághalmazai a $(0, \infty)$ és $(-\infty, 0]$ intervallumok: $\mathcal{I}(Q) = (0, \infty)$, $\mathcal{I}(R) = (-\infty, 0]$.

Ha P egy n-változós predikátum az A halmazon, akkor P igazsághalmazára $\mathcal{I}(P) \subseteq A^n$. Ha $\mathcal{I}(P) = A^n$, akkor azt mondjuk, hogy a P predikátum azonosan igaz, ha pedig $\mathcal{I}(P) = \emptyset$, akkor P azonosan hamis.

Az n-változós predikátumokra vonatkozó alapműveletek a következőképpen is definiálhatók:

a) $\mathcal{I}(\overline{P}) = A^n \setminus \mathcal{I}(P)$,

b) $\mathcal{I}(P \wedge Q) = \mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(Q)$,

c) $\mathcal{I}(P \vee Q) = \mathcal{I}(P) \cup \mathcal{I}(Q)$,

d) $\mathcal{I}(P \rightarrow Q) = (A^n \setminus \mathcal{I}(P)) \cup \mathcal{I}(Q)$,

d) $\mathcal{I}(P \leftrightarrow Q) = A^n \setminus (\mathcal{I}(P) \Delta \mathcal{I}(Q))$.

Megjegyezzük, hogy $P \Rightarrow Q$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mathcal{I}(P) \subseteq \mathcal{I}(Q)$, továbbá $P \Leftrightarrow Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q)$.

2.6. Feladatok

1. Igazoljuk a 2.3. szakasz 1. Tételének állításait.

2. Igaz-e, hogy

a) $A \cap (A \cup B) = A$,

b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

tetszőleges A, B, C halmazokra ?

Megoldás. c) Nem. Legyen pl. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ és $E = \{1, 2, 3\}$.

3. Igazoljuk, hogy $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ és vezessük le ennek használatával, hogy a Δ művelet asszociatív.

4. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 - (y + 1)^2 = 12\}$$

ahol $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

5. Határozzuk meg a következő halmaz elemeit:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + 2y^2 = 5\}.$$

6. Határozzuk meg a következő halmaz elemeinek a számát:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 2x + 3y = 2000\},$$

ahol $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

7. Ha $A \cap C = \emptyset$, akkor igazoljuk, hogy $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

8. Igazoljuk, hogy ha $A \cap C = B \cap C$ és $A \cup C = B \cup C$, akkor $A = B$.

Megoldás. Az abszorbció és a disztributivitás szerint: $A = A \cap (A \cup C) =$
$= A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C) = B \cap (B \cup C)$.

9. Ha A, B, C, D halmazok, akkor:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

b) Az $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ állítás nem igaz általában.

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

3. Relációk

3.1. Relációk, példák relációkra. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ adott halmazok. **n-változós reláció**nak vagy **n-áris reláció**nak nevezzük a $\rho = (A_1, A_2, ..., A_n, R)$ rendszert, ahol R részhalmaza az $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ Descartes-szorzatnak.

Ha $n = 2$, akkor a **kétváltozós reláció** vagy **bináris reláció** fogalmát kapjuk: $\rho = (A_1, A_2, R)$, ahol $R \subseteq A_1 \times A_2$.

A továbbiakban csak bináris relációkkal foglakozunk, ezeket röviden **reláció**knak nevezzük és így jelöljük: $\rho = (A, B, R)$, ahol $R \subseteq A \times B$. Az R halmazt a ρ reláció **grafikon**jának nevezzük és jelölés: $(a, b) \in R \Leftrightarrow a\rho b$, olvasd: a ρ relációban van b-vel. Ellenkező esetben (a nincs ρ relációban b-vel) a jelölés: $(a, b) \notin R \Leftrightarrow a \not\rho b$.

Azt mondjuk, hogy ρ **homogén reláció**, ha $A = B$; ρ az **üres reláció**, ha $R = \emptyset$; ρ az **univerzális reláció**, ha $R = A \times B$.

Az A halmazon értelmezett **diagonális reláció**nak nevezzük az $\mathbf{1}_A = (A, A, \Delta_A)$, $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ relációt (itt $a\mathbf{1}_A b \Leftrightarrow a = b$).

A ρ relációt gyakran azonosítjuk R grafikonjával, így $A \times B$ az univerzális reláció, $\emptyset$ az üres reláció, Δ_A pedig a diagonális reláció.

Példák. 1) Legyen $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2\}$ és $\rho = (A, B, R)$, ahol $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$. Itt például $a\rho 1, a\rho 2$ és $c \not\rho 2$.

2) Egy sík háromszögeinek A halmazában a hasonlósági reláció grafikonja $A \times A$-nak az a részhalmaza, mely az egymással hasonló háromszögpárokból áll.

3) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán értelmezett oszthatósági reláció a következő homogén reláció: $\rho = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R)$, ahol $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a|b\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac\}$.

4) A predikátumokra definiált $P \Rightarrow Q$ és $P \Leftrightarrow Q$ kapcsolatok egy-egy relációt jelentenek.

5) Legyen A az európai országok halmaza, B pedig az ázsiai országok halmaza, és legyen $a \in A, b \in B$ esetén $a\rho b$ jelentése a következő : a "a" európai ország diplomáciai kapcsolatban van a "b" ázsiai országgal.

6) Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor csak egy $\rho = (A, B, R)$ reláció értelmezhető, s ez az üres reláció, melynek grafikonja $R = \emptyset$.

Figyeljük meg, hogy a 2-változós homogén reláció azonos az 2-változós predikátum fogalmával.

Azt mondjuk, hogy a $\rho = (A, B, R)$ reláció **részrelációj**a a $\sigma = (A, B, S)$ relációnak, jelölés $\rho \subseteq \sigma$, ha $R \subseteq S$, azaz ha $\forall (a, b) \in A \times B : a\rho b \Rightarrow a\sigma b$.

3.2. Műveletek relációkkal. A relációkra a következő műveleteket értelmezzük: Tekintsük a $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (A, B, S)$ relációkat.

A ρ és σ relációk **metszet**e a $\rho \cap \sigma = (A, B, R \cap S)$ reláció, tehát $a(\rho \cap \sigma)b \Leftrightarrow a\rho b \wedge a\sigma b$.

A ρ és σ relációk **egyesítés**e vagy **unió**ja a
$\rho \cup \sigma = (A, B, R \cup S)$ reláció, így $a(\rho \cup \sigma)b \Leftrightarrow a\rho b \vee a\sigma b$.

A ρ reláció **kiegészítő relációj**a a $\complement\rho = (A, B, \complement R)$ reláció, ahol $\complement R$ az R halmaznak az $A \times B$-re vonatkozó kiegészítő halmaza. Így $a\complement\rho b \Leftrightarrow a \not\rho b$.

A ρ reláció **inverz relációj**a a $\rho^{-1} = (B, A, R^{-1})$ reláció, ahol $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$. Így $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$.

Példák. A $\mathbb{Z}$ halmazon az $=$ részrelációja a $\leq$ relációnak és az $|$ oszthatósági reláció nem részrelációja a $\leq$-nek, mert például $2| - 6$ és $2 \not\leq -6$.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $\leq$ és $\geq$ relációk metszete az $=$ reláció, az $=$ és a $<$ relációk egyesítése pedig a $\leq$ reláció.

$\mathbb{R}$-ben a $<$ reláció kiegészítő relációja a $\geq$ reláció, és $<$ inverze a $>$ reláció.

A ρ és σ relációk **szorzat**a a $\sigma \circ \rho = (A, D, S \circ R)$ reláció, ahol $S \circ R = \{(a,d) \in A \times D : \exists x \in B \cap C : (a,x) \in R \wedge (x,d) \in S\}$, azaz $a(\sigma \circ \rho)b \Leftrightarrow \exists x \in B \cap C : a\rho x \wedge x\rho d$. A $\rho \circ \rho$ szorzatot ρ^2-tel is jelöljük.

Példa. Legyek $<= (\mathbb{N}, \mathbb{N}, R)$ és $>= (\mathbb{N}, \mathbb{N}, S)$ az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett $<$ illetve $>$ relációk, melyekre $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}) : a < b\}$ és $S = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a > b\}$. Ekkor $a(< \circ >)b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 : a > c \wedge c < b \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, azaz $< \circ >$ grafikonja az $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ halmaz és $a(> \circ <)b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a < c \wedge c > b \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, azaz $> \circ <$ az univerzális reláció, grafikonja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Következik ebből a példából, hogy a relációk szorzása nem kommutatív, azaz általában $\sigma \circ \rho \neq \rho \circ \sigma$.

Tétel. Ha $\rho = (A, B, R), \rho' = (A, B, R'), \sigma = (C, D, S), \sigma' = (C, D, S')$ és $\tau = (E, F, T)$ relációk, akkor igazak a következő összefüggések:

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho, \quad (\complement\rho)^{-1} = \complement\rho^{-1}$,

2) $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}, \quad (\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$,

3) $(\rho \cap \rho')^{-1} = \rho^{-1} \cap \rho'^{-1}, \quad (\rho \cup \rho')^{-1} = \rho^{-1} \cup \rho'^{-1}$,

4) $\rho \circ \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ \rho = \rho$,

5) Ha $\sigma \subseteq \sigma', \rho \subseteq \rho'$, akkor $\sigma \circ \rho \subseteq \sigma' \circ \rho'$,

6) $\sigma \circ (\rho \cup \rho') = (\sigma \circ \rho) \cup (\sigma \circ \rho'), \quad (\sigma \cup \sigma') \circ \rho = (\sigma \circ \rho) \cup (\sigma' \circ \rho)$,

7) $\sigma \circ (\rho \cap \rho') \subseteq (\sigma \circ \rho) \cap (\sigma \circ \rho'), \quad (\sigma \cap \sigma') \circ \rho \subseteq (\sigma \circ \rho) \cap (\sigma' \circ \rho)$.

Bizonyítás. A 2) második összefüggését, a szorzás asszociativitását igazoljuk:
$\tau \circ \sigma = (C, F, T \circ S), (\tau \circ \sigma) \circ \rho = (A, F, (T \circ S) \circ R)$, továbbá
$\sigma \circ \rho = (A, D, S \circ R), \tau \circ (\sigma \circ \rho) = (A, F, T \circ (S \circ R)$.

Azt kell belátnunk, hogy $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

$\forall (x,t) \in (T \circ S) \circ R \Leftrightarrow x(\tau \circ \sigma) \circ \rho t \Leftrightarrow \exists y \in B \cap C : (x\rho y \wedge y(\tau \circ \sigma)t) \Leftrightarrow \exists y \in B \cap C : (x\rho y \wedge \exists z \in E \cap D : (y\sigma z \wedge z\tau t)) \Leftrightarrow \exists y \in B \cap C \wedge \exists z \in E \cap D : (x\rho y \wedge y\sigma z \wedge z\tau t) \Leftrightarrow \exists z \in E \cap D : (\exists y \in B \cap C : x\rho y \wedge y\sigma z) \wedge z\tau t \Leftrightarrow \exists z \in E \cap D : (x(\sigma \circ \rho)z \wedge z\tau t) \Leftrightarrow x\tau \circ (\sigma \circ \rho)t \Leftrightarrow (x,t) \in T \circ (S \circ R)$. $\square$

3.3. Reláció metszetei

Legyen $\rho = (A, B, R)$ egy reláció és $X \subseteq A$. A $\rho(X) = \{b \in B | \exists x \in X : x\rho b\}$ halmazt a ρ **reláció** X **részhalmazra vonatkozó metszet**ének nevezzük. Ha $X = \{x\}$ egy egyelemű halmaz, akkor jelölés: $\rho(\{x\}) = \rho\langle x \rangle = \{b \in B : x\rho b\}$.

A $\rho(A)$ metszetet a ρ reláció **második projekció**jának nevezzük és $pr_2(\rho)$-val jelöljük. A $\rho^{-1}(B) = \{a \in A | \exists b \in B : a\rho b\}$ metszet a ρ reláció **első projekció**ja, jelölés: $pr_1(\rho)$.

Megjegyezzük, hogy $\rho(X), \rho\langle x \rangle, pr_2(\rho) \subseteq B$ és $pr_1(\rho) \subseteq A$.

Példa. A fenti első példában adott relációra $\rho(\{a,b\}) = \{1,2\}, \rho(\{c,d\}) = \{1\}$, $\rho\langle a \rangle = \{1,2\}, \rho\langle d \rangle = \emptyset, pr_2(\rho) = \{1,2\}, pr_1(\rho) = \{a,b,c\}$.

Tétel. Legyenek $\rho = (A, B, R), \rho' = (A, B, R'), \sigma = (C, D, S)$ relációk és $X, X' \subseteq A$. Akkor érvényesek a következő összefüggések:

1) Ha $X \subseteq X', \rho \subseteq \rho'$, akkor $\rho(X) \subseteq \rho'(X')$,

2) $\rho(X \cup X') = \rho(X) \cup \rho(X'), \quad (\rho \cup \rho')(X) = \rho(X) \cup \rho'(X)$,

3) $\rho(X \cap X') \subseteq \rho(X) \cap \rho(X'), \quad (\rho \cap \rho')(X) \subseteq \rho(X) \cap \rho'(X)$,

4) $(\sigma \circ \rho)(X) = \sigma(\rho(X) \cap C)$; ha $B = C$, akkor $(\sigma \circ \rho)(X) = \sigma(\rho(X))$.

Bizonyítás. A 4) összefüggést igazoljuk: $\forall y \in (\sigma \circ \rho)(X) \Leftrightarrow \exists x \in X : x(\sigma \circ \rho)y \Leftrightarrow \exists x \in X : (\exists z \in B \cap C : x\rho z \wedge z\sigma y) \Leftrightarrow \exists z \in B \cap C : (\exists x \in X : x\rho z) \wedge z\sigma y \Leftrightarrow \exists z \in B \cap C : z \in \rho(X) \wedge z\sigma y \Leftrightarrow \exists z \in \rho(X) \cap C : z\sigma y \Leftrightarrow z \in \sigma(\rho(X) \cap C))$. $\square$

Megjegyzés. A 3) összefüggésekben az egyenlőség általában nem áll fenn. Legyen például $\rho = (A, A, R)$, ahol $A = \{1,2,3\}, R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1)(3,3)\}$ és legyen $X = \{1,2\}, X' = \{2,3\}$. Ekkor $\rho(X) \cap \rho(X') = \{1,2,3\}$ és $\rho(X \cap X') = \rho\langle 2\rangle = \{2\}$.

Szerkesszünk hasonló példákat illetve ellenpéldákat a felsorolt tulajdonságokra.

3.4. Feladatok

1. Igazoljuk a 3. fejezet tételeinek állításait.

2. Legyen $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,4\}$, $R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subseteq A \times B$, $R_2 = \{(1,4),(3,1),(3,4)\} \subseteq B \times C$, $\rho_1 = (A, B, R_1)$, $\rho_2 = (B, C, R_2)$. Határozzuk meg a következő relációkat: $\rho_2 \circ \rho_1$, $\rho_1 \circ \rho_2$, ρ_1^{-1}, ρ_1^{-1}, $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}$, $\rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

3. Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, $X = \{a_2, a_4\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$ és $R = \{(a_1, b_2), (a_3, b_5), (a_1, b_3), (a_2, b_4)\} \subseteq A \times B$. Határozzuk meg az $R(X)$, $R\langle a_2\rangle$, $R^{-1}(Y)$, $R^{-1}\langle b_5\rangle$, $pr_1(R)$ és $pr_2(R)$ halmazokat.

4. Legyen $\delta = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, |)$ az oszthatósági reláció. Határozzuk meg a $\delta\langle 1\rangle$, $\delta^{-1}(\{4,9\})$, $pr_1(\delta)$ és $pr_2(\delta)$ halmazokat.

4. Ekvivalenciarelációk

4.1. Homogén relációk tulajdonságai. A továbbiakban néhány fontosabb típusú homogén relációt vizsgálunk.

Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Ekkor azt mondjuk, hogy ρ egy reláció az A halmazon és

a) ρ **reflexív**, ha minden $x \in A$ esetén $x\rho x$ ($\forall x \in A \Rightarrow x\rho x$), azaz "minden elem relációban van önmagával";

b) ρ **tranzitív**, ha minden $x, y, z \in A, x\rho y$ és $y\rho z$ esetén $x\rho z$ ($\forall x, y, z \in A$: $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ez utóbbi elem relációban van egy harmadikkal, akkor az első is relációban van a harmadikkal";

c) ρ **szimmetrikus**, ha minden $x, y \in A, x\rho y$ esetén $y\rho x$ ($\forall x, y \in A : x\rho y \Rightarrow y\rho x$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel, akkor ez utóbbi elem is relációban van az első elemmel";

d) ρ **antiszimmetrikus**, ha minden $x, y \in A, x\rho y$ és $y\rho x$ esetén $x = y$ ($\forall x, y \in A$: $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$), azaz "valahányszor, ha egy elem relációban van egy másik elemmel és ha ez utóbbi elem is relációban van az elsővel, akkor a két elem egyenlő";

e) ρ **előrendezési reláció**, ha ρ reflexív és tranzitív. Ekkor (A, ρ) neve **előrendezett halmaz**;

f) ρ **ekvivalenciareláció**, ha ρ reflexív, tranzitív és szimmetrikus. Az A halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk összességét $\mathcal{E}(A)$-val jelöljük;

g) ρ **rendezési reláció**, ha ρ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ekkor (A, ρ) neve **rendezett halmaz**.

Megjegyzés. Igazolhatók a következő állítások:

i) ρ reflexív $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho$;

ii) ρ tranzitív $\Leftrightarrow \rho^2 \subseteq \rho$;

iii) ρ szimmetrikus $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;

iv) ρ antiszimmetrikus $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$;

v) ρ reflexív és antiszimmetrikus $\Rightarrow \rho \cap \rho^{-1} = 1_A$;

vi) ρ előrendezési reláció $\Rightarrow \rho^2 = \rho$;

vii) ρ ekvivalenciareláció $\Leftrightarrow 1_A \subseteq \rho \wedge \rho = \rho^2 = \rho^{-1}$;

viii) ρ ekvivalenciareláció és rendezési reláció $\Leftrightarrow \rho = 1_A$.

Például ii) igazolása: "$\Rightarrow$" Tegyük fel, hogy ρ tranzitív, akkor $\forall x, y \in A : x\rho^2 y \Rightarrow \exists z \in A : x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow x\rho y$ (a feltétel szerint). "$\Leftarrow$" $\forall x, y, z \in A : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x(\rho \circ \rho)z \Rightarrow x\rho z$ (mert $\rho^2 \subseteq \rho$), tehát igaz az asszociativitás.

Példák. 1) Az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán az oszthatóság előrendezési reláció, nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus, mert például $3|-3$ és $-3|3$, de $-3 \neq 3$.

2) A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán az oszthatóság rendezési reláció és $(\mathbb{N}, |)$ rendezett halmaz.

3) A $\mathbb{Z}$ halmazon az $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|a - b$ kongruencia reláció ekvivalenciareláció.

4) Az $(A, A, A \times A)$ univerzális reláció ekvivalenciareláció.

4.2. Ekvivalenciaosztályok. Ha ρ ekvivalenciareláció az A halmazon, akkor a $\rho\langle x\rangle = \{y \in A : x\rho y\}$ metszeteket, ahol $x \in A$, **ekvivalenciaosztály**oknak nevezzük. Egy rögzített ekvivalenciaosztályba tartoznak az egymással relációban lévő elemek. Az ekvivalenciaosztályok halmazát a ρ-hoz rendelt **faktorhalmaz**nak nevezzük: $A/\rho = \{\rho\langle x\rangle : x \in A\}$.

Példák. 1) A $\mathbb{Z}$ halmazon az előbbi, $a \equiv b \pmod n$ kongruencia relációhoz rendelt faktorhalmaz $\mathbb{Z}/\equiv\ = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, ..., \widehat{n-1}\}$, ahol $\widehat{k} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv k \pmod n\} = \{x \in \mathbb{Z} : n|x-k\} = \{x \in \mathbb{Z} | \exists j \in \mathbb{Z} : x = jn + k\}$.

2) $A/1_A = \{\{x\} : x \in A\}$ és $A/(A \times A) = \{A\}$.

Lemma. Ha ρ ekvivalenciareláció az A halmazon és $x, y \in A$, akkor egyenértékűek a következő állítások:

i) $x\rho y$ ii) $y \in \rho\langle x\rangle$ iii) $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle$.

Bizonyítás. i) "$\Leftrightarrow$ ii)" azonnali az értelmezés alapján. Továbbá "i) $\Rightarrow$ iii)": legyen $x\rho y$ és tetszőleges $z \in \rho\langle x\rangle$. Akkor $x\rho y \wedge x\rho z \Rightarrow z\rho x \wedge x\rho y$ (ρszimmetrikus) $\Rightarrow z\rho y$ (ρ tranzitív) $\Rightarrow z \in \rho\langle y\rangle \Rightarrow \rho\langle x\rangle \subseteq \rho\langle y\rangle$. Hasonlóan $\rho\langle y\rangle \subseteq \rho\langle x\rangle$, tehát iii) igaz.

"iii) $\Rightarrow$ i)": ha $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle$, akkor $y \in \rho\langle y\rangle = \rho\langle x\rangle \Rightarrow y\rho x \Rightarrow x\rho y$. $\square$

4.3. Halmaz osztályfelbontásai. Legyen A egy nemüres halmaz és $\pi \subseteq \mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$. Azt mondjuk, hogy π egy **osztályfelbontás**a vagy **osztályozás**a A-nak, ha

a) $A = \cup_{B\in\pi} B$ és

b) $\forall B_1, B_2 \in \pi, B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$, azaz π-ben barmely két különböző halmaz diszjunkt.

Például az $A = \{1, 2, 3, 4, 4, 6\}$ halmaznak $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$ egy osztályfelbontása.

Ha $B \in \pi$ és $b \in B$, akkor b egy **reprezentáns**a B-nek.

A következő tétel azt mutatja, hogy az ekvivalenciarelációk és az osztályfelbontások kölcsönösen meghatározzák egymást. Ha ugyanis adott egy ekvivalenciareláció, akkor gyűjtsük össze az egymással relációban levő elemeket és egy osztályfelbontást kapunk. Ha pedig adott egy osztályfelbontás, akkor képezzük azt a relációt, mely szerint 2 elem relációban van, ha ugyanahhoz az osztályhoz tartoznak. Ez ekvivalenciareláció lesz. Pontosabban,

Tétel. Legyen A egy nemüres halmaz.

1) Ha ρ egy ekvivalenciareláció az A-n, akkor az $A/\rho = \{\rho\langle x\rangle : x \in A\}$ faktorhalmaz egy osztályfelbontása A-nak.

2) Legyen $\pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ egy osztályfelbontása A-nak és értelmezzük a következő relációt: $\rho_\pi = (A, A, R_\pi)$, ahol $R_\pi = \cup_{B\in\pi}(B \times B)$, azaz $x\rho_\pi y \Leftrightarrow \exists B \in \pi : x, y \in B$ (x és y ugyanahhoz a B-hez tartoznak). Akkor ρ_π ekvivalenciareláció az A-n.

Bizonyítás. 1) Igazoljuk, hogy $A = \cup_{x\in A}\rho\langle x\rangle$. A "$\supseteq$" bennfoglalás azonnali, mert $\rho\langle x\rangle \subseteq A$ minden $x \in A$-ra. Továbbá $\forall y \in A \Rightarrow y \in \rho\langle y\rangle$ (mert ρ reflexív) $\Rightarrow y \in \cup_{x\in A}\rho\langle x\rangle$, ahonnan következik a "$\subseteq$" bennfoglalás.

Most tegyük fel, hogy $\rho\langle x\rangle \cap \rho\langle y\rangle \neq \emptyset$, ahol $x, y \in A$. Igazoljuk, hogy ekkor $\rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle$. Valóban, a feltétel szerint $\exists u \in \rho\langle x\rangle \cap \rho\langle y\rangle \Rightarrow x\rho u \wedge y\rho u \Rightarrow x\rho u \wedge u\rho y$ (mert ρ szimmetrikus) $\Rightarrow x\rho y$ (ρ tranzitív) $\Rightarrow \rho\langle x\rangle = \rho\langle y\rangle$ a Lemma szerint.

2) ρ_π reflexív, mert $\forall x \in A = \cup_{B\in\pi}B \Rightarrow \exists B \in \pi : x \in B \Rightarrow (x, x) \in B \times B \Rightarrow x\rho_\pi x$.

ρ_π tranzitív, mert $\forall x, y, z \in A : x\rho_\pi y \wedge y\rho_\pi z \Rightarrow \exists B, C \in \pi : x, y \in B \wedge y, z \in C$. Így $y \in B \cap C$, s kapjuk, hogy $B = C$ (mert $B \neq C$ esetén értelmezés szerint $B \cap C = \emptyset$, ami ellentmondás). Tehát $x, z \in B = C \Rightarrow x\rho_\pi z$.

Továbbá ρ_π szimmetrikus, mert $\forall x, y \in A : x\rho_\pi y \Rightarrow \exists B \in \pi : x, y \in B \Rightarrow y\rho_\pi x$.

A fentiek szerint ρ ekvivalenciareláció. $\square$

4.4. Feladatok

1. Legyen $\rho = (A, B, R)$ egy reláció. Bizonyítsuk be, hogy:

a) Ha ρ reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus, akkor $\rho = \mathbf{1}_A$.

b) Ha ρ reflexív és tranzitív, akkor $\rho^2 = \rho$.

2. A komplex számok halmazán tekintsük a ρ_1 és ρ_2 relációkat, ahol $z\rho_1 w \Leftrightarrow |z| = |w|$ és $z\rho_2 w \Leftrightarrow z = w = 0$ vagy $\arg z = \arg w$. Igazoljuk, hogy ρ_1 és ρ_2 ekvivalenciarelációk és ábrázoljuk grafikusan a $\mathbb{C}/\rho_1$ és $\mathbb{C}/\rho_2$ osztályokat.

3. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Ha $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (3,2), (2,3), (1,3), (3,1)\}$, határozzuk meg a megfelelő osztályfelbontást.

b) Ha $\pi = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$, határozzuk meg a megfelelő ekvivalenciarelációt.

4. Határozzuk meg az összes ekvivalenciarelációt egy $1, 2, 3$ illetve 4 elemű halmazon.

5. Legyen ρ_1 és ρ_2 két ekvivalenciareláció az A halmazon. Bizonyítsuk be, hogy:

a) ρ_1^{-1} és $\rho_1 \cap \rho_2$ ekvivalenciarelációk. (Általánosabban, ha $(\rho_i)_{i\in I}$ ekvivalenciarelációk rendszere az A-n, akkor $\bigcap_{i\in I} \rho_i$ is ekvivalenciareláció az A halmazon.)

b) $\complement \rho_1$ és $\rho_1 \cup \rho_2$ általában nem ekvivalenciarelációk.

c) $\rho_1 \circ \rho_2$ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. Ebben az esetben igazoljuk, hogy $\rho_1 \circ \rho_2$ a ρ_1 és ρ_2-t tartalmazó legkisebb ekvivalenciareláció.

6. Az A halmazon értelmezett ρ homogén reláció neve **cirkuláris reláció**, ha

$$\forall x, y, z \in A \;\; x\rho y, y\rho z \;\Rightarrow\; z\rho x.$$

Igazoljuk, hogy ρ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha ρ reflexív és cirkuláris.

Megoldás. Ha ρ reflexív és cirkuláris, akkor szimmetrikus, mert ha $x\rho y$, akkor $x\rho y, y\rho y$ (refl.) $\Rightarrow y\rho x$ és tranzitív, mert $x\rho y, y\rho z \;\Rightarrow\; z\rho x \Rightarrow x\rho z$ (szimm).

7. Hol a hiba a következőkben ? "Minden szimmetrikus és tranzitív ρ reláció reflexív. Bizonyítás: ha $x\rho y$, akkor a szimmetria miatt $y\rho x$, innen $x\rho y$ és $y\rho x$, tehát $x\rho x$, mert a reláció tranzitív."

Megoldás. Az állítás nem igaz. Adjunk ellenpéldát. A "bizonyításban" ott a hiba, hogy feltételeztük, hogy adott x-hez van olyan y, hogy relációban legyenek, ilyen y nem biztos, hogy létezik.

5. Rendezési relációk

5.1. Rendezési relációk

Legyen $\rho = (A, A, R)$ egy homogén reláció. Emlékeztetünk arra, lásd 4. fejezet, hogy ρ **rendezési reláció** és (A, ρ) **rendezett halmaz**, ha ρ reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Ekkor azt mondjuk, hogy (A, ρ) **teljesen rendezett halmaz** vagy **lánc**, ha a következő tulajdonság is teljesül: $\forall x, y \in A \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$ (másképpen $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$, az univerzális reláció), azaz A bármely két eleme összehasonlítható a ρ reláció szerint.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ teljesen rendezett halmazok.

2) $(\mathbb{N}, |)$ rendezett halmaz és nem teljesen rendezett, mert pl. 2 és 3 nem hasonlíthatók össze, egyik sem osztója a másiknak.

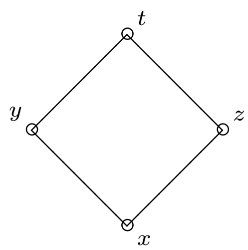
3) Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ rendezett halmaz. Ha A-nak egynél több eleme van, akkor $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nem teljesen rendezett.

4) Ha (A, ρ) rendezett (teljesen rendezett) halmaz és $B \subseteq A$, akkor $(B, \rho \cap (B \times B))$ rendezett (teljesen rendezett).

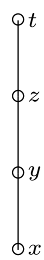
Ha ρ rendezési reláció, akkor $x\rho y$ helyett gyakran $x \leq y$-t írunk, akkor is, ha ρ nem a szokásos "kisebb vagy egyenlő" reláció. További jelölések: $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$ (szigorú egyenlőtlenség); $x > y$, ha $y < x$.

A véges rendezett halmazokat **Hasse-féle diagram**okkal ábrázoljuk. Ha $x < y$ és ha nem létezik $z \in A$ úgy, hogy $x < z < y$, akkor az y pontot az x pontnál magasabb szinten helyezzük el és a két pontot egy egyenes szakasszal összekötjük.

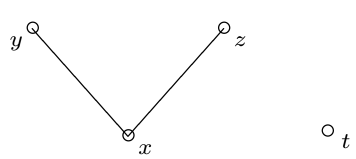
Példák. Legyen $A = \{x, y, z, t\}$ és tekintsük azt a rendezési relációt A-n, melynek grafikonja $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (x, y), (x, z), (x, t), (y, t), (z, t)\}$, azaz $x < y < t$, $x < z < t$. Ennek Hasse-diagramja:



Ha a grafikon $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (t, t), (x, y), (x, z), (x, t), (y, z), (y, t), (z, t)\}$, akkor $(A, \leq)$ lánc és a Hasse-diagram a következő :



A harmadik diagram azt a rendezési relációt adja meg, melyre $x < y, x < z$, y és z nem hasonlíhatók össze, továbbá t nem hasonlítható össze az x, y, z egyikével sem.



5.2. Rendezett halmazok tulajdonságai

Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz és $x \in A$. Azt mondjuk, hogy x az A-nak **legkisebb eleme** vagy **minimuma** (**legnagyobb eleme** vagy **maximuma**), ha $\forall a \in A \Rightarrow x \leq a$ (illetve $\forall a \in A \Rightarrow a \leq x$). Jelölés: $x = \min A$ (illetve $x = \max A$).

Megjegyezzük, hogy ha létezik legkisebb elem (legnagyobb elem), akkor csak egy ilyen van. Valóban, ha például x és x' legkisebb elemek, akkor $x \leq x'$ (mert x legkisebb elem) és $x' \leq x$ (mert x' legkisebb elem), így az antiszimmetria alapján $x = x'$.

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq)$-ben $x = 0$ legkisebb elem és legnagyobb elem nem létezik.

2) $(\mathbb{N}, |)$-ban az 1 a legkisebb elem és a 0 a legnagyobb elem, mert $1|a$ és $a|0$ minden $a \in \mathbb{N}$ esetén.

3) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban nem létezik legkisebb elem és nem létezik legnagyobb elem.

4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$-ban $\min \mathcal{P}(A) = \emptyset$ és $\max \mathcal{P}(A) = A$.

Az $(A, \leq)$ egy rendezett halmaznak $x \in A$ **minimális eleme** (**maximális eleme**), ha $\forall a \in A : a \leq x \Rightarrow a = x$ (illetve $\forall a \in A : x \leq a \Rightarrow a = x$). Másképp fogalmazva $x \in A$ minimális elem (maximális elem), ha A-ban nincs olyan a elem, melyre $a < x$ (illetve $a > x$).

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \leq)$-ben $x = 0$ minimális elem és maximális elem nem létezik.

2) $(\mathbb{N}, |)$-ban az 1 minimális elem és 0 maximális elem.

3) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban a prímszámok minimális elemek és maximális elem nem létezik.

Az értelmezések alapján azonnali, hogy ha létezik legkisebb (legnagyobb) elem, akkor ez az egyetlen minimális (maximális) elem. A fordított állítás nem igaz, például ha $A = \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 9\}$, akkor az $(A, |)$ rendezett halmazban a 9 az egyetlen maximális elem és nem létezik legnagyobb elem.

Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz és $B \subseteq A, B \neq \emptyset$, akkor beszélhetünk a B legkisebb (legnagyobb) eleméről valmint a B minimális (maximális) elemeiről, lásd a lánc definíciója utáni 4. Példát.

Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett halmaz, akkor a minimális elem (maximális elem) fogalma egyenértékű a legkisebb elem (illetve legnagyobb elem) fogalmával.

Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz, $x \in A$ és $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy x **alsó korlátja** (**felső korlátja**) B-nek, ha $\forall b \in B \Rightarrow x \leq b$ (illetve $\forall b \in B \Rightarrow b \leq x$). Továbbá, x a B-nek **infimuma** vagy **legnagyobb alsó korlátja** (**szuprémuma** vagy **legkisebb felső korlátja**), ha x a B alsó korlátai halmazának maximuma (illetve x a B felső korlátai halmazának minimuma). Jelölés: $x = \inf B$ (illetve $x = \sup B$).

Példák. 1) $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$-ban a $B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ halmaznak egyetlen alsó korlátja van, az $x = 1$, $\inf B = 1$, B-nek felső korlátja és szuprémuma nem létezik

2) $(\mathbb{R}, \leq)$-ban a $B = (1, 3]$ intervallumnak alsó korlátja minden $x \leq 1$ szám és felső korlátja minden $x \geq 3$ szám, továbbá $\inf B = 1 \notin B$, $\sup B = 3 \in B$.

3) Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor az A minden eleme alsó korlátja és felső korlátja a $B = \emptyset$-nak. Továbbá $\exists \inf \emptyset \Leftrightarrow \exists \max A \Leftrightarrow \exists \sup A$, $\exists \sup \emptyset \Leftrightarrow \exists \min A \Leftrightarrow \exists \inf A$ és ekkor $\inf \emptyset = \max A = \sup A$, $\sup \emptyset = \min A = \inf A$.

Következik, hogy minden B részhalmaznak legfeljebb egy infimuma és legfeljebb egy szuprémuma létezhet; továbbá, ha B-nek van olyan x alsó korlátja (y felső korlátja), mely B-nek eleme, akkor $x = \inf B$ (illetve $y = \sup B$).

Az $(A, \leq)$ rendezett halmazt **hálónak** nevezzük, ha A minden kételemű részhalmazának létezik infimuma és létezik szuprémuma ($\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow \exists \inf\{a, b\} \wedge \exists \sup\{a, b\}$). $(A, \leq)$ **teljes háló**, ha A minden nem üres részhalmazának létezik infimuma és létezik szuprémuma ($\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists \inf B \wedge \exists \sup B$). $(A, \leq)$ **jólrendezett halmaz**, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme ($\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min B \in B$).

Példák. 1) $(\mathbb{N}, |)$ háló: minden $a, b \in \mathbb{N}$-re $\inf\{a, b\}$ az a és b számok legnagyobb közös osztója, $\sup\{a, b\}$ pedig az a és b számok legkisebb közös többszöröse.

2) Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett, akkor $(A, \leq)$ háló: $\forall a, b \in A : \inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$ és $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$.

3) $(\mathbb{R}, \leq)$ nem teljes háló, mert például a $B = (-\infty, 0)$ intervallumnak nem létezik alsó korlátja s így nincs infimuma $(\mathbb{R}, \leq)$-ben.

4) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ teljes háló. Ha $X = \{X_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, akkor $\inf X = \cap_{i \in I} X_i$ és $\sup X = \cup_{i \in I} X_i$.

5) Ha $(A, \leq)$ jólrendezett, akkor $(A, \leq)$ teljesen rendezett. $(\mathbb{N}, \leq)$ jólrendezett, $(\mathbb{R}, \leq)$ nem jólrendezett, mert például a $(0, 1)$ intervallumnak nincs legkisebb eleme.

5.3. Jólrendezett halmazok

A következő tétel megmutatja, hogy jólrendezett halmazok esetén alkalmazható a matematikai indukció módszere.

Tétel. (Jólrendezett halmazok jellemzése) Ha $(A, \leq)$ egy teljesen rendezett halmaz, akkor egyenértékűek a következő állítások:

i) $(A, \leq)$ jólrendezett,

ii) $\exists a_0 = \min A$ és minden $B \subseteq A$ esetén, ha B rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $a_0 \in B$,

b) $\forall a \in A : \{x \in A : x < a\} \subseteq B \Rightarrow a \in B$,

akkor $B = A$.

Bizonyítás. i) $\Rightarrow$ ii) Fogadjuk el, hogy $(A, \leq)$ jólrendezett. Akkor létezik $a_0 = \min A$ és tegyük fel, hogy ii) második része nem igaz, azaz létezik olyan $B \subseteq A$, melyre teljesül a) és b) és $B \neq A$.

Így $A \setminus B \neq \emptyset$ és a feltétel szerint létezik $x = \min A \setminus B$. Itt $x \in A \setminus B$, azaz $x \notin B$. Továbbá $\forall y \in A : y < x \Rightarrow y \in B$ (mert ha $y \in A \setminus B$, akkor ez ellentmond x definíciójának) $\Rightarrow \{y \in A : y < x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$, b) szerint, ami ellentmondás.

ii) $\Rightarrow$ i) Fogadjuk el, hogy ii) igaz az A minden részhalmazára és tegyük fel, hogy A nem jólrendezett, azaz létezik olyan $B \subseteq A, B \neq \emptyset$ halmaz, melynek nincs legkisebb eleme. Akkor

α) $a_0 \notin B$, mert ha $a_0 = \min A \in B$, akkor $a_0 = \min B$, ami ellentmondás,

β) $\forall a \in A : \{x \in A : x < a\} \subseteq A \setminus B \Rightarrow a \in A \setminus B$. Valóban, ha ez nem lenne igaz, akkor $a \in B$ és mivel az a-nál kisebb x-ek mind $A \setminus B$-ben vannak, kapjuk, hogy $a = \min B$, ami ellentmondás.

Az α és β alapján az $A \setminus B$ részhalmazra teljesülnek az a) és b) feltételek, s így $A \setminus B = A$, azaz $B = \emptyset$, s ez ellentmondást jelent. $\square$

Következmény. (Transzfinit indukció tétele) Legyen $(A, \leq)$ egy jólrendezett halmaz, $a_0 = \min A$ és legyen P egy, az A-n értelmezett egyváltozós predikátum. Tegyük fel, hogy

1) $P(a_0)$ igaz,

2) Minden $a \in A$ esetén ha $P(x)$ igaz minden $x < a$-ra, akkor $P(a)$ igaz.

Akkor $P(a)$ igaz minden $a \in A$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $B = \{a \in A : P(a) \text{ igaz } \} \subseteq A$, mely rendelkezik az előző tétel a) és b) tulajdonságaival, s így $B = A$. $\square$

Az $(\mathbb{N}, \leq)$ jólrendezett halmaz esetén a matematikai indukció szokásos megfogalmazását kapjuk.

5.4. Feladatok

1. Legyen $A \neq \emptyset$ és $\mathcal{O}(A) = \{\rho = (A, A, R) \mid \rho$ rendezési reláció $\}$. Ha $\sigma, \rho \in \mathcal{O}(A)$, akkor:

a) $\rho \cap \sigma, \rho^{-1} \in \mathcal{O}(A)$.

b) $\complement\rho \notin \mathcal{O}(A)$.

c) Általában $\rho \cup \sigma \notin \mathcal{O}(A)$.

2. Határozzuk meg az összes rendezési relációt az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon.

3. Határozzuk meg az összes 4 és 5 elemű hálót. Készítsünk Hasse–féle diagramokat.

4. Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz. Ha létezik $a = \min A$, akkor a az A egyetlen minimális eleme. Igazoljuk, hogy a fordított állítás nem igaz.

6. Függvények

6.1. A függvény fogalma

Az $f = (A, B, F), F \subseteq A \times B$ relációt **függvény**nek nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén az $f\langle a \rangle$ metszet egyelemű részhalmaza B-nek.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor A-t az f **értelmezési halmazá**nak vagy **értelmezési tartományá**nak nevezzük, jelölés $A = \operatorname{dom} f$ (f doméniuma). A B halmaz az f **értékkészlete**, jelölés $B = \operatorname{codom} f$ (f codoméniuma), az $f(A)$ metszet az f függvény **értéktartomány**a vagy **kép**e, jelölés $f(A) = \operatorname{Im} f$, F pedig a függvény grafikonja.

Ha $f = (A, B, F)$ egy függvény, akkor a következő jelöléseket használjuk:
$f : A \to B, A \xrightarrow{f} B$. Ha $a \in A$, akkor az $f\langle a \rangle = \{b\}$ egyenlőséggel meghatározott $b \in B$ elem jelölése $b = f(a)$ vagy $a \mapsto b = f(a)$.

Megjegyzések. a) Az $f : A \to B$ és $f' : A' \to B'$ függvények akkor és csak akkor egyenlőek ($f = f'$), ha $A = A', B = B'$ és $f(a) = f(a')$ minden $a \in A$ esetén.

b) Ha $A = \emptyset$, akkor egyetlen $\rho = (A, B, R)$ reláció létezik, az üres reláció ($R = \emptyset$) és ez függvény minden B halmazra.

Ha $A \neq \emptyset$ és $B = \emptyset$, akkor a $\rho = (A, \emptyset, \emptyset)$ üres reláció nem függvény.

c) Ha $f : A \to B$ egy függvény és $X \subseteq A, Y \subseteq B, y \in Y$, akkor $f(X) = \{b \in B | \exists x \in X : f(x) = b\} = \{f(x) : x \in X\}$, $f^{-1}(Y) = \{a \in A | \exists y \in Y : a f^{-1} y\} = \{a \in A | \exists y \in Y : f(a) = y\} = \{a \in A : f(a) \in Y\}$ és $f^{-1}\langle y \rangle = f^{-1}(y) = \{a \in A : f(a) = y\}$, a grafikon pedig $F = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Példák. A 3. fejezet 1. Példájában szereplő reláció nem függvény, mert például $\rho\langle a \rangle = \{1, 2\}$ kételemű halmaz. A $\rho' = (A, B, R'), A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2\}, R' = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$ reláció függvény.

6.2. Karakterisztikus függvény

Legyen E egy halmaz és $A \subseteq E$. A $\chi : E \to \{0, 1\}$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvényt az A részhalmaz **karakterisztikus függvény**ének nevezzük.

Tétel. Ha $A, B \subseteq E$, akkor

i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x), \quad \forall x \in E,$

ii) $A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x), \quad \forall x \in E,$

iii) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in E,$

iv) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x), \quad \forall x \in E,$

v) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x), \quad \forall x \in E,$

vi) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x)), \quad \forall x \in E,$

vii) $\chi_{A \Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x) = (\chi_A(x) - \chi_B(x))^2, \quad \forall x \in E.$

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $A \subseteq B$ és legyen $x \in E$. A következő eseteket vizsgáljuk: 1. $x \in A, x \in B$, akkor $1 \leq 1$ igaz, 2. $x \in A, x \notin B$, ez lehetetlen, 3. $x \notin A, x \in B$, akkor $0 \leq 1$ igaz, 4. $x \notin A, x \notin B$, akkor $0 \leq 0$ igaz.

Másképp: az igazolandó egyenlőtlenség csak akkor lenne hamis, ha $\chi_A(x) = 1$ és $\chi_B(x) = 0$. De ekkor $x \in A$ és $x \notin B$, ami ellentmond a feltételnek.

Hasonlóképpen a fordított implikáció.

ii) Következik i) alapján.

A többi összefüggés az előbbi 4 eset vizsgálatával igazolható, vagy úgy, hogy használjuk az előző (és már igazolt) képleteket, például: vi) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, lásd 2. szakasz, és így

$$\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_{A\cap\bar{B}}(x) = \chi_A(x)\chi_{\bar{B}}(x) = \chi_A(x)(1-\chi_B(x)). \quad \square$$

Megjegyzés. A ii) alapján ezek a képletek alkalmasak halmazok egyenlőségének a bizonyítására. Például igazoljuk, hogy $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (a szimmetrikus különbség asszociatív, lásd 2. szakasz):

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B - 2(\chi_A+\chi_B-2\chi_A\chi_B)\chi_C =$$

$$(*) \qquad = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,$$

ahol függvényegyenlőségeket írtunk (x nélkül).

Hasonlóképpen számolva, $\chi_{A\Delta(B\Delta C)}$ is a (*) kifejezést adja. Másképp, Δ kommutativitása és (*) alapján

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(B\Delta C)\Delta A} = \chi_B + \chi_C + \chi_A - 2(\chi_B\chi_C + \chi_B\chi_A + \chi_C\chi_A) + 4\chi_B\chi_C\chi_A =$$

$$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C,$$

és készen vagyunk.

6.3. Fügvények kompozíciója

Tétel. a) Legyen $f = (A, B, F)$ és $g = (C, D, G)$ két függvény. A $g \circ f = (A, D, G \circ F)$ szorzatreláció akkor és csak akkor függvény, ha $f(A) \subseteq C$, azaz $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{dom} g$ és ekkor $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ minden $a \in A$ esetén.

Ha $f : A \to B, g : B \to D$ függvények, azaz ha $B = C$, akkor $g \circ f : A \to D$ függvény.

b) Ha $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ három függvény, akkor $f \circ \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ f = f$ és $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Bizonyítás. a) ”$\Rightarrow$” Tegyük fel, hogy $g \circ f$ függvény és legyen $b \in f(A)$. Azt fogjuk belátni, hogy $b \in C$, azaz $f(A) \subseteq C$. Valóban, $b \in f(A)$ miatt létezik $a \in A$ úgy, hogy $b = f(a)$. Legyen $d = (g \circ f)(a)$ (ahol $g \circ f$ függvény), azaz $a(g \circ f)d$, ahonnan következik, hogy létezik $c \in B \cap C$ úgy, hogy afc és cgd. Kapjuk, hogy afc és afb, s mivel f függvény, ezért $b = c \in B \cap C$, s így $b \in C$, amit igazolni akartunk.

”$\Leftarrow$” Most tegyük fel, hogy $f(A) \subseteq C$, s legyen tetszőleges $a \in A$. Mivel f függvény, létezik egy jól meghatározott $b \in f(A)$ elem, melyre $f(a) = b$ (afb). Itt $b \in f(A) \subseteq C$, s mivel g is függvény, létezik egy jól meghatározott $d \in D$ elem, melyre $g(b) = d$ (bgd). Kapjuk, hogy $a(g\circ f)d$ és $(g\circ f)\langle a\rangle = \{d\}$, azaz $g\circ f$ függvény és $(g\circ f)(a) = d = g(b) = g(f(a))$.

Hivatkozhatunk a 3.3. szakasz Tételének 4. pontjára is, amely szerint $(g \circ f)\langle a\rangle = g(f\langle a\rangle) = g(f(a)) = g\langle f(a)\rangle = \{g(f(a))\}$ egyelemű halmaz, tehát $g \circ f$ függvény és $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

b) Következik a relációkra vonatkozó megfelelő tulajdonságokból. $\square$

Tekintsük az $f : A \to B, g : B \to C, h : A \to C$ függvényeket. Ezek jól szemléltethetők a következő diagrammal:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Azt mondjuk, hogy ez **kommutatív diagram**, ha $h = g \circ f$. Ez a kifejezésmód használatos más esetekben is, például

(1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & D \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Ezek **kommutatív diagram**ok, ha $h \circ k = g \circ f$ (1), illetve $h \circ g \circ f = k$ (2).

A B^A halmaz és a g^f függvény.

Ha A és B halmazok, akkor B^A-val jelöljük az $f : A \to B$ függvények összességét. A korábbiak szerint, ha $A = \emptyset$, akkor $B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ és ha $A \neq \emptyset, B = \emptyset$, akkor $\emptyset^A = \emptyset$.

Legyen $f : A' \to A, g : B \to B'$ két függvény és értelmezzük a következő függvényt: $g^f : B^A \to (B')^{A'}, g^f(\alpha) = g \circ \alpha \circ f$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(g^f)(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B' & B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

6.4. Injektív, szürjektív és bijektív függvények

Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy

f **injektív**, ha A különböző elemeinek különböző képelemek felelnek meg, azaz, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ez egyenértékű a következő állítással: $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

f **szürjektív**, ha B-nek minden eleme képelem, azaz, ha $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$. Ez a feltétel így is írható: $f(A) = B$;

f **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz, ha $\forall y \in B \exists! x \in A$ (létezik egy és csak egy $x \in A$): $f(x) = y$.

Példák: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ függvény nem injektív, mert pl. $-1 \neq 1$ és $f(-1) = f(1) = 1$ és nem is szürjektív, mert pl. $y = -1 \in \mathbb{R}$ esetén nem létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = x^2 = -1$ legyen.

A $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ függvény injektív és nem szürjektív, $h : [0, \infty) \to [0, \infty), h(x) = x^2$ pedig injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Bármely A halmaz esetén az $\mathbf{1}_A = (A, A, \Delta_A)$ diagonális reláció egy bijektív függvény.

A következőkben az injektív, szürjektív és bijektív függvények jellemzéseit adjuk meg.

Tétel. (Injektív függvények jellemzése) Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Egyenértékűek a következő állítások:

i) f injektív,

ii) ha A' egy tetszőleges halmaz és $\alpha, \beta : A' \to A$ tetszőleges függvények úgy, hogy $f \circ \alpha = f \circ \beta$, akkor $\alpha = \beta$ (azaz f-fel lehet balról egyszerűsíteni),

iii) (feltételezzük, hogy $A \neq \emptyset$) f-nek létezik baloldali inverze, azaz létezik egy $r : B \to A$ függvény úgy, hogy $r \circ f = \mathbf{1}_A$.

Bizonyítás. i) $\Rightarrow$ ii) Ha $f \circ \alpha = f \circ \beta$, akkor minden $a \in A'$ esetén $f(\alpha(a)) = f(\beta(a))$, s innen f injektivitása miatt $\alpha(a) = \beta(a)$, azaz $\alpha = \beta$.

ii) $\Rightarrow$ i) Tegyük fel, hogy az ii) állítás igaz és f nem injektív, azaz létezik $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ úgy, hogy $f(x_1) = f(x_2)$.

Legyen $A' = \{x_1, x_2\}$ és $\alpha, \beta : A' \to A, \alpha(x_1) = x_1, \alpha(x_2) = x_2, \beta(x_1) = x_1, \beta(x_2) = x_1$. Ekkor $\alpha \neq \beta$, de $f \circ \alpha = f \circ \beta$, mert $(f \circ \alpha)(x_1) = f(\alpha(x_1)) = f(x_1) = f(\beta(x_1)) = (f \circ \beta)(x_1)$, $\quad (f \circ \alpha)(x_2) = f(\alpha(x_2)) = f(x_2) = f(x_1) = f(\beta(x_2)) = (f \circ \beta)(x_2)$, s ez ellentmond az ii) állításnak.

i) $\Rightarrow$ iii) Feltételezzük, hogy f injektív és $a_0 \in A$. Tekintsük az

$$r : B \to A, r(b) = \begin{cases} a, \text{ ha } b = f(a) \in f(A), \\ a_0, \text{ ha } b \in B \setminus f(A) \end{cases}$$

függvényt, mely jól értelmezett, hiszen f injektivitása miatt minden $b \in f(A)$ esetén egy és csak egy olyan a van, melyre $f(a) = b$. Így $(r \circ f)(a) = r(f(a)) = r(b) = a = \mathbf{1}_A(a)$ minden $a \in A$-ra, azaz $r \circ f = \mathbf{1}_A$.

iii) $\Rightarrow$ i) Ha létezik egy $r : B \to A$ függvény úgy, hogy $r \circ f = \mathbf{1}_A$ és ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $r(f(x_1)) = r(f(x_2))$, ahonnan $x_1 = x_2$, ami f injektivitását igazolja. $\square$

Tétel. (Szürjektív függvények jellemzése) Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Egyenértékűek a következő állítások:

i) f szürjektív,

ii) ha B' egy tetszőleges halmaz és $\alpha, \beta : B \to B'$ tetszőleges függvények úgy, hogy $\alpha \circ f = \beta \circ f$, akkor $\alpha = \beta$ (azaz f-fel lehet jobbról egyszerűsíteni),

iii) f-nek létezik jobboldali inverze, azaz létezik olyan $s : B \to A$ függvény, amelyre $f \circ s = \mathbf{1}_B$.

Bizonyítás. i) $\Rightarrow$ ii) Tegyük fel, hogy $\alpha \circ f = \beta \circ f$, azaz $\alpha(f(a)) = \beta(f(a))$ minden $a \in A$-re. Az f szürjektivitása miatt minden $b \in B$-re létezik $a \in A$ úgy, hogy $b = f(a)$, s így $\alpha(b) = \beta(b)$, azaz $\alpha = \beta$.

ii) $\Rightarrow$ i) Tegyük fel, hogy az ii) állítás igaz és f nem szürjektív, azaz létezik $b_0 \in B \setminus f(A)$. Legyen $A \neq \emptyset, B' = B$ és $\alpha, \beta : B \to B, \alpha = \mathbf{1}_B$ és

$$\beta(b) = \begin{cases} b, \text{ ha } b \neq b_0, \\ b_0', \text{ ha } b = b_0, \end{cases}$$

ahol $b_0' \in f(A)$. Ekkor $\alpha \neq \beta$, mert $\beta(b_0) = b_0' \neq b_0$ $(b_0 \notin f(A), b_0 \in f(A))$ de $\alpha \circ f = \beta \circ f$, hiszen $(\alpha \circ f)(a) = \alpha(f(a)) = f(a) = \beta(f(a)) = (\beta \circ f)(a)$ minden $a \in A$-ra, ami ellentmondást jelent.

Ha $A = \emptyset$, akkor legyen $B' = \{0, 1\}, \alpha, \beta : B \to B', \alpha(b) = 0, \beta(b) = 1$ minden $b \in B$-re. Ekkor $\alpha \neq \beta$ és $\alpha \circ f = \beta \circ f = \emptyset$.

i) $\Rightarrow$ iii) Feltételezzük, hogy f szürjektív. Ekkor minden $b \in B$ esetén $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\} \neq \emptyset$. Válasszunk egy rögzített $a \in f^{-1}(b)$ elemet minden b-re, így kapunk egy $s : B \to A, s(b) = a$ függvényt és $(f \circ s)(b) = f(s(b)) = f(a) = b = \mathbf{1}_B(b)$, azaz $f \circ s = \mathbf{1}_B$.

iii) $\Rightarrow$ i) Legyen $s : B \to A$ egy olyan függvény, melyre $f \circ s = \mathbf{1}_B$. Akkor minden $b \in B$-re $b = \mathbf{1}_B(b) = f(s(b))$, így az $a = s(b) \in A$ jelöléssel $f(a) = b$, azaz f szürjektív. $\square$

Tétel. (Bijektív függvények jellemzése) Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Egyenértékűek a következő állítások:

i) f bijektív,

ii) az f^{-1} inverz reláció függvény és ekkor $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A, f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$,

iii) f-nek létezik inverze, azaz létezik olyan $g : B \to A$ függvény, melyre $g \circ f = \mathbf{1}_A, f \circ g = \mathbf{1}_B$.

Bizonyítás. i) $\Leftrightarrow$ ii) f bijektív $\Leftrightarrow$ minden $b \in B$-re az $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$ halmaznak pontosan egy eleme van $\Leftrightarrow$ f^{-1} függvény és $a(f^{-1} \circ f)a' \Leftrightarrow \exists b \in B : afb \wedge bf^{-1}a' \Leftrightarrow \exists b \in B : f(a) = b \wedge f(a') = b \Leftrightarrow a = a'$ (mert f injektív függvény) $\Leftrightarrow a\mathbf{1}_A a'$, azaz $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A$.

Továbbá, $b(f \circ f^{-1})b' \Leftrightarrow \exists a \in A : bf^{-1}a \wedge afb' \Leftrightarrow \exists a \in A : f(a) = b \wedge f(a) = b' \Leftrightarrow b = b'$ (mert f szürjektív függvény) $\Leftrightarrow b\mathbf{1}_B b'$, azaz $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$.

i) $\Rightarrow$ iii) Ha f bijektív, akkor legyen $g = f^{-1}$, melyről most igazoltuk, hogy teljesíti az iii) feltételeit.

iii) $\Rightarrow$ i) Következik az előző Tételek iii) $\Rightarrow$ i) részeiből. $\square$

Megjegyzés. Ha f bijektív függvény, akkor az f^{-1} függvényis bijektív. Valóban, az előbbi i) $\Leftrightarrow$ ii) része szerint f^{-1} bijektív akkor és csak akkor, ha $(f^{-1})^{-1} = f$ függvényés ez utóbbi állítás igaz.

6.5. Feladatok

1. Határozzuk meg mindazokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. x helyett $(1-x)$-et írva: $3f(x) + 2f(1-x) = -4x + 3$, az eredetivel együtt ez egy egyenletrendszer. Kapjuk, hogy: $f(x) = -4x + 11/5$.

2. Határozzuk meg mindazokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$f(x) - f(-x) = x^2, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. $x = 1$-re: $f(1) - f(-1) = 1$, $x = -1$-re: $f(-1) - f(1) = 1$, ellentmondás, nincs ilyen függvény.

3. Igazoljuk, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4$ injektív függvény, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x + 2$ pedig nem injektív függvény.

Megoldás. $f(x) = x^3(2x+3)+4$, itt $x^3(2x+3) = 0$, ha $x = 0$ vagy $x = -3/2$, tehát $f(0) = f(-3/2) = 4$, f nem injektív.

Ha $g(x_1) = g(x_2)$, akkor $x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2$, $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0$, ahol a második zárójel $(x_1^2 + x_2/2)^2 + 3x_2^2/4 + 1 \neq 0$, tehát $x_1 = x_2$, g injektív.

4. Legyen $\rho = (A, B, R)$ egy reláció. Igazoljuk, hogy ρ akkor és csak akkor függvény, ha $\mathbf{1}_A \subseteq \rho^{-1} \circ \rho$ és $\rho \circ \rho^{-1} \subseteq \mathbf{1}_B$.

5. Legyen $f : A \to B$ egy függvény. Igazoljuk, hogy

a) $(\forall)\, X \subseteq A$ és $(\forall)\, Y \subseteq B$ esetén $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ és $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$.

b) $f \circ f^{-1} \circ f = f$.

6. Legyenek $f : A' \to A$, $g : B \to B'$, $f' : A'' \to A'$, $g' : B' \to B''$ függvények.

a) Ha $A' = B' = \{1, 2, 3\}$ és $A = B = \{1, 2\}$, $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $g(1) = 2$ és $g(2) = 3$, határozzuk meg a g^f függvényt.

Legyen $\mathcal{F}(A, B) = B^A$ és $\mathcal{F}(f, g) = g^f$. Bizonyítsuk be, hogy:

b) $\mathcal{F}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(A,B)}$.

c) $\mathcal{F}(f \circ f', g' \circ g) = \mathcal{F}(f', g') \circ \mathcal{F}(f, g)$.

7. Legyen $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ két függvény. Igazoljuk, hogy:

a) Ha f és g injektív (szürjektív), akkor $g \circ f$ is injektív (szürjektív).
b) Ha $g \circ f$ injektív (szürjektív), akkor f injektív (g szürjektív).
c) Ha $g \circ f$ injektív és f szürjektív, akkor g injektív.
d) Ha $g \circ f$ szürjektív és g injektív, akkor f szürjektív.

8. Legyen $f\colon A \to B$ egy függvény.
a) Igazoljuk, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(i) f injektív.
(ii) $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A$.
(iii) $(\forall)X \subseteq A$: $f^{-1}(f(X)) = X$.
(iv) $(\forall)X \subseteq A$: $f(\complement(X)) \subseteq \complement f(X)$.
(v) $(\forall)X_1, X_2 \subseteq A$: $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

b) Igazoljuk, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(i) f szürjektív.
(ii) $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$.
(iii) $(\forall)Y \subseteq B$: $f(f^{-1}(Y)) = Y$.
(iv) $(\forall)X \subseteq A$: $\complement f(X) \subseteq f(\complement(X))$.

9. Legyen A egy halmaz és $\varphi_A\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{F}(A, \{0,1\})$, $\varphi_A(X) = \chi_X$, ahol $\chi_X\colon A \to \{0,1\}$, $\chi_X(a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \in X \\ 0, & \text{ha } a \notin X \end{cases}$ az X karakterisztikus függvénye. Igazoljuk, hogy φ_A bijektív és $\varphi_A^{-1}(\chi) = \chi^{-1}(1)$, $\forall\ \chi\colon A \to \{0,1\}$.

7. Halmazok számossága

7.1. Halmazok ekvivalenciája, véges és végtelen halmazok

Az A és B halmazokat **ekvivalens halmazok**nak nevezzük, ha létezik egy $f : A \to B$ bijektív függvény. Jelölés: $A \sim B$. Ez egy, a halmazokra vonatkozó reláció.

7.1. Tétel. A $\sim$ reláció egy ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. Ha A egy tetszőleges halmaz, akkor az $\mathbf{1}_A : A \to A$, $\mathbf{1}_A(a) = a$ függvény bijektív, tehát $\sim$ reflexív. Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor léteznek az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív függvények. Mivel $g \circ f : A \to C$ is bijektív, következik, hogy $A \sim C$, tehát $\sim$ tranzitív. Ha $f : A \to B$ bijektív, akkor $f^{-1} : B \to A$ is bijektív, tehát $\sim$ szimmetrikus. □

Ha két halmaz, A és B ekvivalens, akkor azt mondjuk, hogy egyenlő számosságúak, jelölés: $|A| = |B|$. Itt $|X|$ az X halmazhoz rendelt **számosság** vagy **kardinális szám**. Ennek pontosabb definíciója a következő : az X számosságának (kardinális számának) nevezzük az X halmaz ekvivalenciaosztályát: $|X| = \{Y : Y \sim X\}$.

Például $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{Z}$ és így e két halmaz egyenlő számosságú, mert

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 1, \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros }, \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{ha } n > 1 \text{ páratlan }, \end{cases}$$

bijektív függvény.

Ugyanakkor $\mathbb{Z} \sim 2\mathbb{Z}$, ahol $2\mathbb{Z}$ a páros egész számok halmaza, mert $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ bijektív és $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$, mert $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $g(n) = n + 1$ bijektív. Így $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}^*$ egyenlő számosságúak: $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*|$.

Bármely halmazt összehasonlíthatunk olyan halmazokkal, amelyek elemei természetes számok. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **véges** és n számosságú, ahol $n \in \mathbb{N}$, ha $A = \emptyset$ és ekkor $|A| = 0$, vagy ha A ekvivalens az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmazzal: $A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}$ és $|A| = n \geq 1$. Egy halmaz **végtelen**, ha nem véges.

Véges halmaz minden részhalmaza is véges. Két véges halmaz uniója, metszete és Descartes-szorzata is véges.

Látható az előbbi példákból, hogy egy végtelen halmaz ekvivalens lehet egy valódi részhalmazával. Ez véges halmazokra nem igaz: ha A véges halmaz, $B \subseteq A$ és $A \sim B$, akkor $A = B$.

Igazolni fogjuk, hogy minden végtelen halmaznak létezik vele ekvivalens valódi részhalmaza, és így ez a tulajdonság a végtelen halmazok definíciójának is tekinthető.

A végtelen halmazok számosságait **transzfinit számosság**oknak nevezzük. Az $\mathbb{N}$ halmaz végtelen, számossága $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef null), itt $\aleph$ a héber ábécé első betűje.

Az $\aleph_0$ számosságú halmazokat **megszámlálhatóan végtelen** vagy röviden **megszámlálható halmaz**oknak nevezzük. Így egy A halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik egy $f : \mathbb{N} \to A$ bijektív függvény. Ez azt jelenti, hogy az A halmaz elemei egy végtelen sorozatba rendezhetők, amelyben nincs ismétlődés, azaz A felírható $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ vagy $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ alakban.

A fentiek alapján az $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ és $2\mathbb{Z}$ halmazok megszámlálhatóak, itt
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\}$, $2\mathbb{Z} = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$.

7.2. Tétel. a) Ha A egy végtelen halmaz, akkor A-nak van megszámlálható valódi részhalmaza.

b) Ha A egy megszámlálható halmaz, akkor A-nak van olyan valódi részhalmaza, amely ekvivalens A-val.

Bizonyítás. a) A végtelen, ezért van egy a_0 eleme. Az $A \setminus \{a_0\}$ halmaz is végtelen, ennek is van egy a_1 eleme, amelyre $a_1 \neq a_0$. Tekintsük most az $A \setminus \{a_0, a_1\}$ végtelen halmazt, amelynek van egy $a_2 \neq a_0, a_1$ eleme. Ezt folytatva kapunk egy $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ megszámlálható részhalmazt. Az a_0 elemet elhagyva, $B = \{a_1, a_2, ...\}$ egy megszámlálható valódi részhalmaza A-nak.

b) Ez az a) speciális esete. Ha $A \sim \mathbb{N}$, akkor létezik olyan $C \subset A$, C valódi részhalmaz, amelyre $C \sim \mathbb{N}$, ahonnan $C \sim A$. □

7.3. Tétel. Minden A végtelen halmaznak van A-val ekvivalens A' valódi részhalmaza.

Bizonyítás. a) A végtelen, ezért A-nak létezik B megszámlálható valódi részhalmaza (előző Tétel a) pontja). B-nek van olyan C valódi részhalmaza, amely ekvivalens B-vel (előző Tétel b) pontja). Tehát $C \subset B \subset A$ és $C \sim B$. Következik, hogy $(A \setminus B) \cup C = A'$ valódi része A-nak és létezik egy $f : B \to C$ bijektív függvény.

Kapjuk, hogy a $g : A \to A'$,

$$g(a) = \begin{cases} a, & \text{ha } a \in A \setminus B, \\ f(a), & \text{ha } a \in B \end{cases}$$

$(\forall a \in A)$ függvény bijektív, ahonnan $A \sim A'$. □

7.2. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok

A megszámlálható halmaz fogalmát már megadtuk a 7.1. szakaszban. Láttuk azt is, hogy $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ megszámlálható halmazok.

A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza szintén megszámlálható. Valóban, nézzük először a pozitív $\frac{a}{b}$ racionális számokat, ahol a és b relatív prímek, s rendezzük ezeket sorba az $a+b$ összeg növekvő értékei szerint úgy, hogy minden rögzített $a+b$ értékre a számlálók növekvő értékei szerint rendezünk:

$$a + b = 2 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{1}; \quad a + b = 3 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}; \quad a + b = 4 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1};$$

$$a + b = 5 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}; \quad a + b = 6 : \tfrac{a}{b} = \tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}; ...,$$

ahol a $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, ...$ számokat nem vettük figyelembe, s így

$$\mathbb{Q}^+ = \{\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{5}{1}, ...\}$$

megszámlálható, ahonnan következik, hogy $\mathbb{Q}$ is megszámlálható , mert

$$\mathbb{Q} = \{0, \tfrac{1}{1}, -\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, -\tfrac{2}{1}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{1}, -\tfrac{3}{1}, ...\}.$$

Igazolható, hogy $\mathbb{Z}[X]$ és $\mathbb{Q}[X]$, az egész illetve a racionális együtthatós polinomok halmazai is megszámlálhatók.

7.4. Tétel. i) Egy megszámlálható halmaz bármely részhalmaza véges vagy megszámlálható.

ii) Ha A és B megszámlálható, akkor $A \times B$ is megszámlálható.

Bizonyítás. i) Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Ha $A_1 \subseteq A$, akkor A_1 elemeit nyilván felsorolhatjuk úgy, hogy A elemei közül kihagyjuk azokat, amelyek nincsenek A_1-ben. Ezért A_1 véges vagy megszámlálható.

ii) Elég azt megmutatni, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálható. Az $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $f(m, n) = 2^m(2n + 1)$ függvény bijektív, ezért $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$. □

Az i) tulajdonság alapján következik, hogy ha egy A halmaz bijektíven leképezhető egy megszámlálható B halmaz valamely részhalmazára (A injektíven leképezhető B-re), akkor A véges vagy megszámlálható.

Például, $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \aleph_0$ (előző Tétel ii) pontja), s mivel a $\mathbb{Q}$ halmaz az $f(\frac{a}{b}) = (a, b)$ előírással bijektíven leképezhető a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ egy részhalmazára, következik, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálható (ezt már láttuk más módon).

7.5. Tétel. Ha A és B megszámlálható, akkor $A \cup B$ is az. Általánosabban, véges (és legalább egy) vagy megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítás. Legyen az adott halmazrendszer $(A_n)_{n\in I}$, ahol $I = \{1, 2, ..., k\}$ véges vagy $I = \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen és legyen $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}, ...\}$ minden $n \in I$-re.

Értelmezzük a következő $f : \cup_{n\in I} A_n \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ leképezést. $\forall\, x \in \cup_{n\in I} A_n$ esetén legyen n a legkisebb olyan szám, amelyre $x = a_{nm}$ és legyen $f(x) = (n, m)$. Ekkor f injektív leképezés, tehát $\cup_{n\in I} A_n$ bijektíven leképezhető $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ egy részhalmazára, ezért $\cup_{n\in I} A_n$ megszámlálható (véges nem lehet, mert mindegyik A_n megszámlálhatóan végtelen).

Másképp: ha A_n páronként diszjunkt halmazok, akkor $\forall\, x \in \cup_{n\in I} A_n$ esetén létezik egy és csak egy olyan a_{nm}, amelyre $x = a_{nm}$ és legyen $f(x) = f(a_{nm}) = (n, m)$. Ha A_n páronként nem diszjunktak, akkor tekintsük az A_1, $A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), ...$ halmazokat. Ezek páronként diszjunktak és ezek uniója éppen $\cup_{n\in I} A_n$. $\square$

A kérdés ezek után: Van-e nem megszámlálható végtelen halmaz? A válasz: igen, van ilyen halmaz. Ez következik az alábbi tételből.

7.6. Tétel. (Cantor) Legyen A egy tetszőleges halmaz. Akkor

a) a $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ hatványhalmaz nem ekvivalens A-val,

b) $\mathcal{P}(A)$-nak van olyan részhalmaza, amely ekvivalens A-val,

c) $\mathcal{P}(A)$ ekvivalens az $f : A \to \{0, 1\}$ függvények $\{0, 1\}^A$ halmazával.

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy $A \sim \mathcal{P}(A)$, azaz létezik egy $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijektív függvény. Itt minden $a \in A$ esetén $f(a) \in \mathcal{P}(A)$, tehát $f(a) \subseteq A$. Legyen $B = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$. Ekkor f bijektivitása miatt létezik $b \in A$ úgy, hogy $f(b) = B$. A b elemre nézve két lehetőség van:

1. ha $b \in B$, akkor B definíciója miatt $b \notin f(b) = B$, ami ellentmondás,

2. ha $b \notin B$, akkor szintén B definíciója alapján $b \in f(b) = B$, ez is ellentmondás. Ezzel igazoltuk, hogy A nem ekvivalens $\mathcal{P}(A)$-val.

b) Legyen $B = \{\{a\} : a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Azonnali, hogy az $a \mapsto \{a\}$ megfeleltetés bijektív.

c) Legyen φ: $\mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$, $\varphi(X) = \chi_X$, ahol

$$\chi_X : A \to \{0, 1\}, \quad \chi_X(a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \in X \\ 0, & \text{ha } a \notin X \end{cases}$$

az X karakterisztikus függvénye. Vegyük észre, hogy φ bijektív, mert van inverze:

$$\varphi^{-1}(\chi) = \chi^{-1}(1), \quad \forall\, \chi\colon A \to \{0, 1\}. \quad \square$$

E tételből következik, hogy ha A megszámlálható, akkor $\mathcal{P}(A)$ végtelen, de nem ekvivalens A-val, tehát nem megszámlálható. Például $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ nem megszámlálható halmazok.

Mi több, így egy végtelen A halmazból kiindulva végtelen sok különböző számosságú halmazt szerkeszthetünk:

$$A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))), ...$$

7.7. Tétel. A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ és $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$. Valóban, az $f : (0,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ és $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, g(x) = tg(x)$ függvények bijektívek.

Következik, hogy $(0,1) \sim \mathbb{R}$. Most tegyük fel, hogy $(0,1)$ megszámlálható, azaz $(0,1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Felhasználjuk, hogy minden $(0,1)$-beli x valós szám felírható $x = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$ tizedes tört alakban, ahol $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Ez a felírás egyértelmű, ha a racionális számokra véges tizedes törteket használunk (például a $0,23999...$ alak helyett a $0,24$-et). Így legyen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} ... \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} ... \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} ... \\ &...................... \end{aligned}$$

Adjunk meg egy $x \in (0,1)$ számot az ún. diagonális eljárással:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 ...,$$

ahol például $a_i = 1$, ha $a_{ii} \neq 1$ és $a_i = 2$, ha $a_{ii} = 1$ (az 1 és 2 helyett más számjegyeket is vehetünk). Következik, hogy $x \neq x_n$ minden $n \geq 1$-re, ami ellentmondás.

Ezért $(0,1)$ és $\mathbb{R}$ is nem megszámlálható halmazok. $\square$

Az $\mathbb{R}$ számosságát **kontinuum számosság**nak nevezzük, jelölés: $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, itt $\mathfrak{c}$ a kis gót c betű. Igazolható, hogy $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, azaz $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$, lásd később.

7.3. Halmazrendszerek és függvényrendszerek

Legyen $f : I \to A$ egy függvény és $F = \{(i, f(i)) \mid i \in I\}$ az f grafikonja. Az f függvényt gyakran azonosítjuk F-fel és $(a_i)_{i \in I}$-vel jelöljük, ahol $a_i = f(i)$ és azt mondjuk, hogy $(a_i)_{i \in I}$ egy **elemrendszer**, I pedig ennek az **indexhalmaza**.

Hasonlóan, ha $f : I \to \mathcal{P}(A)$ egy függvény, akkor azt mondjuk, hogy $(A_i)_{i \in I}$ egy **halmazrendszer**, ahol $A_i = f(i) \subseteq A$.

Az $(A_i)_{i \in I}$ **halmazrendszer uniója** az

$$\bigcup\nolimits_{i \in I} A_i = \{a \in A \mid \exists i \in I : a \in A_i\}$$

halmaz, az adott **halmazrendszer metszete** pedig a

$$\bigcap\nolimits_{i \in I} A_i = \{a \in A \mid \forall i \in I : a \in A_i\}$$

halmaz.

Megjegyezzük, hogy ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, mert ekkor egyetlen $a \in A$ elemre sem igaz a $\exists i \in I : a \in A_i$ állítás és $\bigcap_{i \in I} A_i = A$, mert a $\exists i \in I : a \notin A_i$ állítás is hamis minden $a \in A$ elemre, ezért ennek tagadása, a $\forall i \in I : a \in A_i$ állítás igaz minden $a \in A$-ra.

Legyen $(A_i)_{i\in I}$ egy halmazrendszer. Értelmezés szerint,

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \{f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i \in I:\ f(i)\in A_i\}\\ &= \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I:\ a_i \in A_i\}\end{aligned}$$

az $(A_i)_{i\in I}$ rendszer **általánosított Descartes-szorzat**a. A

$$p_j\colon \prod_{i\in I} A_i \to A_j,\quad p_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$$

függvényt **kanonikus projekció**nak nevezzük, és a $(\prod_{i\in I} A_i, (p_i)_{i\in I})$ párt az $(A_i)_{i\in I}$ **halmazrendszer direkt szorzatá**nak nevezzük.

Továbbá, ha $(f_i\colon A_i \to A_i')_{i\in I}$ egy függvényrendszer, akkor

$$\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i',\quad (\prod_{i\in I} f_i)((a_i)_{i\in I}) = (f_i(a_i))_{i\in I}$$

az $(f_i)_{i\in I}$ **függvényrendszer direkt szorzata**.

Vegyük észre, hogy $\prod_{i\in I} A_i$ akkor és csak akkor nemüres, ha $I \neq \emptyset$ és $A_i \neq \emptyset$ minden $i\in I$ esetén. Ha $I = \{1\}$, akkor $\prod_{i\in I} A_i = A_1$; ha $I = \{1,2\}$, akkor a $\prod_{i\in I} A_i$ szorzatot azonosítjuk az $A_1 \times A_2$ Descartes-szorzattal. Ebben az esetben, ha $f_i\colon A_i \to A_i'$, $i = 1,2$, akkor

$$f_1 \times f_2\colon A_1 \times A_2 \to A_1' \times A_2',\quad (f_1 \times f_2)(a_1,a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)).$$

Legyen $(A_i)_{i\in I}$ egy halmazrendszer. Értelmezes szerint,

$$\begin{aligned}\coprod_{i\in I} A_i &= \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}\\ &= \{(a_i, i) \mid i\in I,\ a_i\in A_i\}\end{aligned}$$

az $(A_i)_{i\in I}$ **halmazrendszer diszjunkt uniója**. A

$$q_j\colon A_j \to \coprod_{i\in I} A_i,\quad q_j(a_j) = (a_j, j)$$

függvényt **kanonikus injekció**nak nevezzük, és a $(\coprod_{i\in I} A_i, (q_i)_{i\in I})$ párt az $(A_i)_{i\in I}$ **halmazrendszer direkt összegé**nek nevezzük.

Továbbá, ha $(f_i\colon A_i \to A_i')_{i\in I}$ egy függvényrendszer, akkor

$$\coprod_{i\in I} f_i\colon \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} A_i',\quad (\coprod_{i\in I} f_i)(a_i, i) = (f_i(a_i), i)$$

az $(f_i)_{i\in I}$ **függvényrendszer direkt összege**.

Vegyük észre, hogy $\coprod_{i\in I} A_i$ akkor és csak akkor üres, ha $I = \emptyset$ vagy $A_i = \emptyset$ minden $i \in I$ esetén.

Ha $I = \{1,2\}$, akkor

$$A_1 \amalg A_2 = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}) = \{(a,1) \mid a\in A_1\} \cup \{(a,2) \mid a \in A_2\}.$$

Továbbá, ha $f_i\colon A_i \to A_i'$, $i = 1, 2$, akkor

$$f_1 \amalg f_2\colon A_1 \amalg A_2 \to A_1' \amalg A_2', \quad (f_1 \amalg f_2)(a_i, i) = (f_i(a_i), i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

7.4. Műveletek kardinális számokkal

Emlékeztetünk arra, hogy az A halmaz számosságának (kardinális számának) nevezzük az A halmaz ekvivalenciaosztályát: $|A| = \{B : B \sim A\}$, lásd a 7.1. szakaszt.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **reprezentáns**a az $\alpha = |A|$ kardinális számnak. Ennek reprezentánsa minden olyan B halmaz is, amelyre $B \sim A$.

A kardinális számok összeadását, szorzását és hatványozását a következőképpen értelmezzük: Ha $\alpha_i = |A_i|$, $\alpha = |A|$ és $\beta = |B|$, akkor

(1) $\sum_{i\in I} \alpha_i = |\coprod_{i\in I} A_i|$;
(2) $\prod_{i\in I} \alpha_i = |\prod_{i\in I} A_i|$;
(3) $\beta^\alpha = |B^A|$.

Igazolni kell, hogy a fenti definíciók nem függnek a reprezentánsok megválasztásától.

Valóban, ha $\alpha_i = |A_i| = |A_i'|$ és $f_i\colon A \to A_i'$ bijektív minden $i \in I$ esetén, akkor $\coprod_{i\in I} f_i\colon \coprod A_i \to \coprod_{i\in I} A_i'$ és $\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i'$ is bijektív függvények. Ha $f\colon A' \to A$ és $g\colon B \to B'$ bijektív függvények, akkor $g^f : B^A \to (B')^{A'}$ is bijektív.

A kardinális számokra vonatkozó fenti műveletek kiterjesztései a természetes számokra, azaz a véges számosságokra vonatkozó megfelelő műveleteknek (ha $|A| = k$, $|B| = n$, ahol $k, n \in \mathbb{N}$, akkor $|A \times B| = kn$, $|B^A| = n^k$, és $|A \cup B| = k + n$ ha A, B diszjunktak).

Megjegyezzük, hogy két tetszőleges halmaz esetén: $|A_1| + |A_2| = |A_1 \amalg A_2|$ és $|A_1| \cdot |A_2| = |A_1 \times A_2|$. Továbbá minden $\alpha = |A|$ esetén $\alpha + \alpha = 2\alpha$ és $\alpha\alpha = \alpha^2$, mert $A \amalg A \sim \{0, 1\} \times A$ és $A \times A \sim A^{\{0,1\}}$ (adjuk meg a megfelelő bijekciókat).

7.8. Tétel. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ egy halmazrendszer. Akkor

a) $\phi\colon \coprod_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} A_i$, $\phi(a_i, i) = a_i$ szürjektív függvény, és ϕ akkor és csak akkor injektív, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i, j \in I$, $i \neq j$ esetén.

b) $|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|$.

Bizonyítás. a) Ha $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ akkor létezik $i \in I$ úgy, hogy $a \in A_i$ és $\phi(a, i) = a$, tehát ϕ szürjektív.

Tételezzük fel, hogy ϕ injektív és hogy léteznek $i, j \in I$ és $a \in A_i \cap A_j$. Mivel $\phi(a, i) = \phi(a, j) = a$, következik, hogy $(a, i) = (a, j)$, tehát $i = j$.

Fordítva, feltételezzük, hogy minden $i \neq j$ esetén, $A_i \cap A_j = \emptyset$, és legyen $(a_i, i), (a_j, j) \in \coprod_{i\in I} A_i$ úgy, hogy $\phi(a_i, i) = \phi(a_j, j)$; következik, hogy $a_i = a_j \in A_i \cap A_j$, tehát $i = j$ és $(a_i, i) = (a_j, j)$.

b) Ha $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, akkor a)-ból következik, hogy $A_1 \cup A_2 \sim A_1 \amalg A_2$, tehát $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$.

Általában, $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ és $A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$, ahol $A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$ és $(A_2 \setminus A_1) \cap (A_1 \cap A_2) = \emptyset$; következik, hogy

$$|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|. \quad \square$$

7.9. Tétel. Érvényesek a következő kardinális számokra vonatkozó azonosságok:

a) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$; $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$.

b) $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$; $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$.

c) $(\sum_{i\in I} \alpha_i)(\sum_{j\in J} \beta_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i\beta_j$.

d) $\beta^{\sum_{i\in I} \alpha_i} = \prod_{i\in I} \beta^{\alpha_i}$.

e) $(\prod_{i\in I}\alpha_i)^\beta=\prod_{i\in I}\alpha_i^\beta$.
f) $\gamma^{\alpha\beta}=(\gamma^\beta)^\alpha$.

Bizonyítás. Az alábbiakban jelölés: $\mathrm{Hom}(A,B)=B^A$.

a) Legyen $\alpha_1=|A_1|$, $\alpha_2=|A_2|$. Definíció szerint $A_1\sqcup A_2=A_2\sqcup A_1$, ezért $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1$. Továbbá $\psi\colon A_1\times A_2\to A_2\times A_1$, $\psi(a_1,a_2)=(a_2,a_1)$ bijektív függvény, ahonnan $\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1$.

c) Ha $\alpha_i=|A_i|$ és $\beta_j=|B_j|$, akkor $\phi\colon(\coprod_{i\in I}A_i)\times(\coprod_{j\in J}B_j)\to\coprod_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$, $((a_i,i),(b_j,j))\mapsto((a_i,b_i),(i,j))$ bijektív függvény.

d) Legyen $\alpha_i=|A_i|$, $i\in I$, és $\beta=|B|$. Ekkor

$$\phi\colon \mathrm{Hom}(\coprod_{i\in I}A_i,B)\to\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,B),\quad \phi(\alpha)=(\alpha\circ q_i)_{i\in I}$$

bijektív függvény, ahol $q_i\colon A_i\to\coprod_{i\in I}A_i$ a direkt összeg kanonikus injekciója.

Ehhez azt kell belátnunk, hogy:

$$\forall(\alpha_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,B)\ \exists!\ \alpha\in\mathrm{Hom}(\coprod_{i\in I}A_i,B):\ \alpha\circ q_i=\alpha_i,\ \forall i\in I.$$

Ha létezik ilyen α, akkor

$$\forall a_i\in A_i:\quad \alpha_i(a_i)=\alpha(q_i(a_i))=\alpha((a_i,i)),$$

tehát $\alpha((a_i,i))=\alpha_i(a_i)$ egyértelműen meghatározott, ha adott az $(a_i,i)\in\coprod_{i\in I}A_i$.

e) A fenti jelölésekkel,

$$\psi\colon \mathrm{Hom}(B,\prod_{i\in I}A_i)\to\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(B,A_i),\quad \psi(\alpha)=(p_i\circ\alpha)_{i\in I}$$

bijektív függvény, ahol $p_i\colon\prod_{i\in I}A_i\to A_i$ a direkt szorzat kanonikus projekciója. Ez hasonlóképpen látható be mint az előbb.

f) Legyen $\alpha=|A|$, $\beta=|B|$, $\gamma=|C|$, $\phi\colon\mathrm{Hom}(A\times B,C)\to\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(B,C))$, $\phi(f)(a)(b)=f(a,b)$ $\forall(a,b)\in A\times B$, és $\psi\colon\mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}(B,C))\to\mathrm{Hom}(A\times B,C)$, $\psi(g)(a,b)=g(a)(b)$, $a\in A$, $b\in B$. Belátható, hogy $\psi=\phi^{-1}$. □

A fenti azonosságok szerint a kardinális számokra érvényesek a természetes számokra vonatkozó szokásos műveleti tulajdonságok.

Megjegyezzük, hogy minden A halmaz esetén $|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$ a 7.6. Tétel szerint, pl. $A=\mathbb{N}$-re $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=2^{\aleph_0}=\aleph_1$, $2^{\aleph_1}=\aleph_2$,... jelölés szerint.

7.10. Tétel. Legyen A egy tetszőleges végtelen halmaz. Akkor
a) $|A|+n=|A|$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.
b) $|A|+\aleph_0=|A|$.
c) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, $\quad\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.
d) Általánosabban, $n\aleph_0=\aleph_0$, $\quad\aleph_0^n=\aleph_0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Bizonyítás. Ha A végtelen, azaz $\aleph_0\le|A|$, akkor létezik $\phi\colon\mathbb{N}^*\to A$, $n\mapsto a_n$ injektív függvény.

a) Legyen $|B|=n$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$, $A\cap B=\varnothing$. Akkor $f\colon A\cup B\to A$, $f(a)=a$, ha $a\notin\phi(\mathbb{N})$, $f(a_k)=a_{k+n}$, $f(b_k)=a_k, 1\le k\le n$ bijektív függvény. Tehát $|A\cup B|=|A|+n=|A|$.

b) Legyen $|C| = \aleph_0$, $C = \{c_1, c_2, ...\}$, $A \cap C = \varnothing$, és $g\colon A \cup C \to A$, $g(a) = a$, ha $a \notin \phi(\mathbb{N})$, $g(a_n) = a_{2n}$, $g(c_n) = a_{2n-1}, n \in \mathbb{N}$. Akkor g bijektív, tehát $|A \cup C| = |A| + \aleph_0 = |A|$.

c) Ha b)-ben $|A| = \aleph_0$, akkor $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Ez abból is következik, hogy $2\mathbb{Z}$ és $2\mathbb{Z}+1$ diszjunktak, $2\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}+1 = \mathbb{Z}$ és $|2\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}+1| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Továbbá $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ alapján, lásd 7.4. Tétel, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

d) n szerinti indukcióval használva c)-t. □

7.11. Tétel. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$, azaz $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Bizonyítás. Tekintsük a $[0,1)$ intervallumot és az $a \in [0,1)$ számoknak az $a = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots$ diadikus törtekként való felírását, ahol $a_n \in \{0,1\}$, amely egyértelmű, ha 1 nem periódusa a törtnek.

Legyen $\phi\colon [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\phi(a) = f$, ahol $f(n) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Ez injektív leképezés a felírásának egyértelműsége miatt. Ugyanakkor ϕ nem szürjektív, mert azok az $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ függvények, amelyekre $\exists n_0 : f(n) = 1, \forall\, n > n_0$ nem képelemek ϕ-ben. De ezek bijektíven leképezhetők a $0, b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n_0} 111\ldots$ alakú racionális számokra (itt az 1 periódusú számokat tekintjük).

Így $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Im}\phi \cup \complement(\operatorname{Im}\phi)$ és következik, hogy $2^{\aleph_0} = |\operatorname{Im}\phi| + |\complement(\operatorname{Im}\phi)| = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$, tehát $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. □

7.5. Kardinális számok rendezése

Legyen $\alpha = |A|$ és $\beta = |B|$ két kardinális szám. Értelmezés szerint, $\alpha \le \beta$ ha létezik egy $\phi\colon A \to B$ injektív függvény.

Ez az értelmezés nem függ a reprezentánsok megválasztásától. Valóban, ha $\alpha = |A| = |A'|$, $f\colon A' \to A$ bijektív, $\beta = |B| = |B'|$, $g\colon B \to B'$ bijektív, akkor $\operatorname{Hom}(f,g)(\phi) = g \circ \phi \circ f\colon A' \to B'$ is injektív függvény.

Továbbá $\alpha < \beta$, ha $\alpha \le \beta$ és $\alpha \ne \beta$. A 7.6. Tétel szerint pl. minden α kardinális szám esetén $\alpha < 2^\alpha$.

Igazolni fogjuk, hogy "$\le$" rendezési reláció. Szükségünk van a következő eredményre.

7.12. Tétel. (Cantor-Bernstein) Ha $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$ és $A_0 \sim A_2$, akkor $A_0 \sim A_1$.

Bizonyítás. Legyen $f\colon A_0 \to A_2$ egy bijektív függvény és értelmezzük az $(A_n)_{n\ge 0}$ halmazrendszert az $A_{n+2} = f(A_n)$ rekurziós képlettel. Mivel $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$, indukcióval belátható, hogy $A_n \supseteq A_{n+1}$ minden $n \ge 0$ esetén.

Legyen $B = \bigcap_{n\ge 0} A_n$; következik, hogy $A = B \cup \bigcup_{n\ge 0}(A_n \setminus A_{n+1})$ és $(A_i \setminus A_{i+1}) \cap (A_j \setminus A_{j+1}) = \emptyset$ ha $i \ne j$. Mivel $A_{n+2} = f(A_n)$, következik, hogy az

$$f_n\colon (A_n \setminus A_{n+1}) \to (A_{n+2} \setminus A_{n+3}), \quad f_n(x) = f(x)$$

bijektív függvény minden $n \ge 0$ esetén. A keresett $g\colon A_0 \to A_1$ bijektív függvényt a következőképpen értelmezhetjük:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in B, \\ f(x), & \text{ha } x \in A_{2n} \setminus A_{2n+1},\ n \ge 0, \\ x, & \text{ha } x \in A_{2n-1} \setminus A_{2n},\ n \ge 1. \end{cases} \qquad \square$$

7.13. Tétel. A "$\le$" reláció rendezési reláció.

Bizonyítás. Ha $\alpha = |A|$, akkor $\alpha \le \alpha$ mert $\mathbf{1}_A\colon A \to A$ injektív.

Ha $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ és $\alpha \le \beta$, $\beta \le \gamma$, akkor léteznek az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ injektív függvények; mivel $g \circ f\colon A \to C$ is injektív, következik, hogy $\alpha \le \gamma$.

Legyen most $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ úgy, hogy $\alpha \le \beta$ és $\beta \le \alpha$, tehát léteznek az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to A$ injektív függvények. Legyen $A_0 = A$, $A_1 = g(B)$ $B_1 = f(A)$, és $A_2 =$

$g(B_1)$. Mivel $B_1 \subseteq B$ következik, hogy $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$. Továbbá, $g \circ f$ injektív függvény és $(g \circ f)(A_0) = g(f(A)) = g(B_1) = A_2$, tehát $A_0 \sim A_2$. A Cantor-Bernstein tételből következik, hogy $A_0 \sim A_1$, tehát $A \sim B$ mert $A_1 \sim B$. $\square$

7.14. Tétel. Ha $\alpha_i \leq \beta_i$, $\forall\, i \in I$ kardinális számok, akkor:

a) $\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \sum_{i\in I} \beta_i$.

b) $\prod_{i\in I} \alpha_i \leq \prod_{i\in I} \beta_i$.

c) Ha $0 \neq \alpha \leq \alpha'$ és $\beta \leq \beta'$, akkor $\beta^\alpha \leq \beta'^{\alpha'}$.

Bizonyítás. a), b) Legyen $\alpha_i = |A_i|$, $\beta_i = |B_i|$, $i \in I$. Ha $f_i \colon A_i \to B_i$ injektív $\forall\, i \in I$, akkor $\coprod_{i\in I} f_i \colon \coprod_{i\in I} A_i \to \coprod_{i\in I} B_i$ és $\prod_{i\in I} f_i \colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ injektívek.

c) Legyen $\alpha = |A|$, $A \neq \varnothing$, $\alpha' = |A'|$, $\beta = |B|$ és $\beta' = |B'|$. Létezik $f \colon A' \to A$ szürjektív függvény és $g \colon B \to B'$ injektív függvény; akkor $g^f : B^A \to (B')^{A'}$ injektív, tehát $\beta^\alpha \leq \beta'^{\alpha'}$. $\square$

Igazolható, hogy bármely két kardinális szám öszehasonlítható, pontosabban:

7.15. Tétel. Ha α és β kardinális számok, akkor vagy $\alpha < \beta$ vagy $\alpha = \beta$ vagy $\alpha > \beta$ (tehát $\sim$ teljes rendezés).

Igazolható továbbá, hogy tetszőleges α és β végtelen számoságok esetén $\alpha + \beta = \alpha\beta = \max(\alpha, \beta)$. Tehát minden α végtelen számosságra $\alpha + \alpha = \alpha^2 = \alpha$. Speciálisan, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ és $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, ezeknek az egyenlőségeknek a bizonyítását már láttuk.

Kérdés, hogy van-e olyan μ számosság, amelyre $\aleph_0 < \mu < \mathfrak{c} = \aleph_1$? **Kontinuum-hipotézis**nek nevezzük azt a feltevést, hogy nem létezik ilyen μ számosság. Cantor azt sejtette, hogy ez bizonyítható, ám kiderült, hogy a halmazelmélet ismert axiómarendszereiben ez eldönthetetlen (nem bizonyítható és nem is cáfolható).

7.6. Néhány speciális halmaz számossága

A megszámlálhatóan végtelen számosság ($\aleph_0$) és a kontinuum számosság ($\mathfrak{c}$) között fennállnak az alábbi összefüggések (azt már láttuk, hogy $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$):

7.16. Tétel.

i) $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

ii) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

iii) $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = \aleph_0^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$.

Bizonyítás. i) $\mathfrak{c}^2 = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{2\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$; $\quad c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

ii) $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = 2\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$; $\quad \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} \cdot \aleph_0 \leq \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$; $\quad \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

iii) $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = (2^{\aleph_0})^\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0\mathfrak{c}} = 2^\mathfrak{c}$; $\quad 2^\mathfrak{c} \leq \aleph_0^\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$. $\square$

7.17. Tétel.

a) A racionális együtthatós polinomok $\mathbb{Q}[X]$ halmazának számossága $|\mathbb{Q}[X]| = \aleph_0$.

b) Az n dimenziós euklidészi tér pontjai E_n halmazának számossága $|E_n| = \mathfrak{c}$.

c) A valós számsorozatok S halmazának számossága: $|S| = \mathfrak{c}$.

d) A valós változós valós függvények $\mathcal{F}$ halmazának számossága: $|\mathcal{F}| = 2^\mathfrak{c} = \aleph_2$.

e) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $C(\mathbb{R})$ halmazának számossága: $|C(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$.

Bizonyítás. a) Legyen $\mathbb{Q}_k[X] = \{P \in \mathbb{Q}[X] : grP = k\}$. Akkor $\mathbb{Q}_k[X] \sim \mathbb{Q}^{k+1}$, innen $|\mathbb{Q}_k[X]| = |\mathbb{Q}^{k+1}| = \aleph_0^{k+1} = \aleph_0$, lásd 7.10. Tétel, tehát $\mathbb{Q}_k$ megszámlálható, és így $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_k[X]$ is megszámlálható, lásd 7.5. Tétel.

b) $|E_n| = |\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}^n = (2^{\aleph_0})^n = 2^{n\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

c) $|S| = |\mathbb{R}^\mathbb{N}| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

d) $|\mathcal{F}| = |\mathbb{R}^\mathbb{R}| = \mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$.

e) Az analízis jól ismert tétele szerint az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket meghatározzák a racionális helyeken felvett értékeik (minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén van olyan racionális tagú (x_n) sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$). Ezért a keresett számosság $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, ugyanakkor a konstans függvények folytonosak, így $\mathfrak{c} \leq |C(\mathbb{R})|$. □

7.7. Feladatok

1. Legyenek $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, $f' : A' \to A''$, $g' : B' \to B''$ függvények. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\times B}$.

b) $(f' \times g') \circ (f \times g) = (f' \circ f) \times (g' \circ g)$.

c) $\forall X \subseteq A$ és $\forall Y \subseteq B$: $(f \times g)(X \times Y) = f(X) \times g(Y)$.

d) nem minden $M \subseteq A \times B$ részhalmaz $X \times Y$ alakú, ahol $X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$, és nem minden $\varphi : A \times B \to A' \times B'$ függvény $f \times g$ alakú.

2. Legyenek $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, $f' : A' \to A''$, $g' : B' \to B''$ függvények. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $\mathbf{1}_A \amalg \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\amalg B}$.

b) $(f' \amalg g') \circ (f \amalg g) = (f' \circ f) \amalg (g' \circ g)$.

3. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat, ahol $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$, $(A_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ adott halmazrendszerek és A adott halmaz:

a) $\complement(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \complement(A_i)$.

b) $\complement(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \complement(A_i)$.

c) $\bigcup_{j\in J}(A \cap B_j) = A \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)$.

d) $\bigcap_{j\in J}(A \cup B_j) = A \cup (\bigcap_{j\in J} B_j)$.

e) $\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} A_{ij}) \subseteq \bigcap_{j\in J}(\bigcup_{i\in I} A_{ij})$.

4. Igazoljuk, hogy:

a) $(\bigcap_{i\in I} X_i) \times (\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I}(X_i \times Y_i)$.

b) $(\bigcup_{i\in I} X_i) \times (\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(X_i \times Y_j)$.

5. Legyen $f : A \to B$ egy függvény és $X_i \subseteq A$, $Y_i \subseteq B$ $\forall i \in I$. Igazoljuk, hogy:

a) $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$.

b) $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$. Adjunk egy olyan példát, amikor a bennfoglalás szigorú.

c) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

d) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i)$.

6. Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$.

7. Legyenek $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$ függvények és $(f_i\colon A_i \to A_i')_{i\in I}$ egy függvényrendszer. Igazoljuk, hogy:

a) Ha f és g injektív (szürjektív) $\Leftrightarrow$ $f \times g$ injektív (szürjektív).

b) Ha f és g injektív (szürjektív), akkor $f \amalg g$ injektív (szürjektív).

8. Igazoljuk, hogy

a) $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{X \subset \mathbb{N} \mid X \text{ véges}\}$ megszámlálható halmaz.

b) $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\ P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\},\ P(z) = 0\}$ megszámlálható ($\mathbb{A}$-t az **algebrai számok** halmazának nevezzük).

c) $\mathbb{R} \sim (0,1) \sim (a,b) \sim [a,b) \sim [a,b] \sim (a,b]$ $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

d) Az irracionális számok halmaza kontinuum számosságú.

e) $\mathbb{R}[X]$ kontinuum számosságú.

7.8. Feladatmegoldások

1. a) $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B : A \times B \to A \times B$, $\forall (x,y) \in A \times B : (\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B)(x,y) = (\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(y)) = (x,y) \Longrightarrow \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\times B}$;

b) $(f' \times g') \circ (f \times g) : A \times B \to A'' \times B''$, $(f' \circ f) \times (g' \circ g) : A \times B \to A'' \times B''$ és $\forall (x,y) \in A\times B : ((f'\times g')\circ(f\times g))(x,y) = (f'\times g')((f\times g)(x,y)) = (f'\times g')(f(x), g(y)) =$

$(f'(f(x)), g'(g(y))) = ((f' \circ f)(x), (g' \circ g)(y)) = ((f' \circ f) \times (g' \circ g))(x, y) \Longrightarrow (f' \times g') \circ (f \times g) = (f' \circ f) \times (g' \circ g)$;

c) $\forall X \subseteq A$, $\forall Y \subseteq B$ esetén $(f \times g)(X \times Y) = (f \times g)(\{(a, b) \mid a \in X \wedge b \in Y\}) = \{(f(a), f(b)) \mid a \in X \wedge b \in Y\} = f(X) \times f(Y)$;

d) ellenpélda: legyen $A = B = A' = B' = \{1, 2\}$, $M = \{(1, 2), (2, 1)\}$ és $\varphi : A \times B \to A' \times B'$ úgy, hogy $\varphi((1, 1)) = (2, 1), \varphi((1, 2)) = (1, 2), \varphi((2, 1)) = (1, 1), \varphi((2, 2)) = (2, 2)$.

2. a) $\mathbf{1}_A \amalg \mathbf{1}_B : A \amalg B \to A \amalg B$, $\forall x_1 \in A : (\mathbf{1}_A \amalg \mathbf{1}_B)(x_1, 1) = (\mathbf{1}_A(x_1), 1) = (x_1, 1)$, $\forall x_2 \in B : (\mathbf{1}_A \amalg \mathbf{1}_B)(x_2, 2) = (\mathbf{1}_B(x_2), 2) = (x_2, 2) \Longrightarrow \mathbf{1}_A \amalg \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \amalg B}$;

b) $(f' \amalg g') \circ (f \amalg g), (f' \circ f) \amalg (g' \circ g)\colon A \amalg B \to A'' \amalg B''$ és $\forall\ x_1 \in A : ((f' \amalg g') \circ (f \amalg g))(x_1, 1) = (f' \amalg g')(f(x_1), 1) = ((f' \circ f)(x_1), 1) = ((f' \circ f) \amalg (g' \circ g))(x_1, 1)$, illetve hasonlóan $\forall\ x_2 \in B : ((f' \amalg g') \circ (f \amalg g))(x_2, 2) = ((f' \circ f) \amalg (g' \circ g))(x_2, 2) \Longrightarrow (f' \amalg g') \circ (f \amalg g) = (f' \circ f) \amalg (g' \circ g)$.

3. Minden x-re: c) $x \in \bigcup_{j \in J}(A \cap B_j) \Leftrightarrow\ \exists\, j \in J : x \in A \cap B_j \Leftrightarrow\ \exists\, j \in J : x \in A \wedge x \in B_j \Leftrightarrow\ x \in A \wedge\ \exists\, j \in J : x \in B_j \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \bigcup_{j \in J} B_j \Leftrightarrow x \in A \cap (\bigcup_{j \in J} B_j)$;

e) $x \in \bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J} A_{ij}) \Leftrightarrow\ \exists\, i \in I : x \in \bigcap_{j \in J} A_{ij} \Leftrightarrow\ \exists\, i \in I :\ \forall\, j \in J : x \in A_{ij} \Rightarrow \forall j \in J : x \in \bigcup_{i \in I} A_{ij} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J}(\bigcup_{i \in I} A_{ij})$.

4. a) $\forall\ (x, y) \in (\bigcap_{i \in I} X_i) \times (\bigcap_{i \in I} Y_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} X_i \wedge y \in \bigcap_{i \in I} Y_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : x \in X_i \wedge y \in Y_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : (x, y) \in (X_i \times Y_i) \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{i \in I}(X_i \times Y_i)$;

b) $\forall\ (x, y) \in (\bigcup_{i \in I} X_i) \times (\bigcup_{j \in J} Y_j) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} X_i \wedge y \in \bigcup_{j \in J} Y_j \Leftrightarrow\ \exists\ i \in I : x \in X_i \wedge\ \exists\ j \in J : y \in Y_j \Leftrightarrow\ \exists\ (i, j) \in I \times J : (x, y) \in X_i \times Y_j \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J}(X_i \times Y_j)$.

5. b) Tekintsük az $X_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$ halmazokat és a sgn függvényt; ekkor $\operatorname{sgn}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n) = \{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{sgn} X_n = \{-1, 0, +1\}$;

d) $\forall\ x \in A : x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} Y_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} Y_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : f(x) \in Y_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : x \in f^{-1}(Y_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$.

6. $\forall\ X \in \mathcal{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow X \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : X \subseteq A_i \Leftrightarrow\ \forall\ i \in I : X \in \mathcal{P}(A_i) \Leftrightarrow X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$.

7. a) „$\Leftarrow$" injektivitás: $\forall\ x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ egy rögzített $b \in B$-re: $(f(x_1), g(b)) = (f(x_2), g(b)) \Rightarrow (f \times g)(x_1, b) = (f \times g)(x_2, b)$ (mivel $f \times g$ injektív) $\Rightarrow (x_1, b) = (x_2, b) \Rightarrow x_1 = x_2$, tehát f valóban injektív (g injektivitását hasonlóképpen igazoljuk); szürjektivitás: mivel $f \times g$ szürjektív $\Rightarrow\ \forall (x', y') \in A' \times B'$ esetén $\exists (x, y) \in A \times B : (f \times g)(x, y) = (x', y') \Rightarrow\ \exists\ x \in A : f(x) = x' \wedge\ \exists\ y \in B : g(y) = y' \Rightarrow f$ és g szürjektív;

8. a) Ha $k \in \mathbb{N}$, legyen $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}) = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| = k\}$. Értelmezzük a $\phi\colon \mathcal{P}_k(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N}^*)^k$ függvényt: ha $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $a_1 < \cdots < a_k$, akkor $\phi_k(X) = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$. Látjuk, hogy ϕ_k injektív, tehát $|\mathcal{P}_k(\mathbb{N})| \le |(\mathbb{N}^*)^k| = \aleph_0$; következik , hogy $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_k(\mathbb{N})$ megszámlálható.

c) Az $(a, b) \sim [a, b) \sim [a, b] \sim (a, b]$ ekvivalenciák következnek a Tételből.

d) Ha $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \sim \mathbb{N}$, ellentmondás, tehát $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \nsim \mathbb{N}$. Továbbá, legyen $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \alpha$, akkor a 7.10. Tétel szerint $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}| = \alpha + \aleph_0 = \alpha$, innen $\alpha = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$.

8. Rendszámok

8.1. A rendszám fogalma, példák

Legyenek $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ rendezett halmazok és $f : A \to B$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy f **növekvő** (**csökkenő**), ha $\forall x, y \in A, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ (illetve $f(y) \leq f(x)$).

Például, $f : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$, $f(n) = n$ növekvő, mert minden $n|m$ esetén $f(n) = n \leq m = f(m)$, de $g = f^{-1} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, |)$, $g(n) = n$ nem növekvő, mert például $2 \leq 3$ és $g(2) = 2 \not| 3 = g(3)$.

Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ rendezett halmazok **hasonló**ak (**izomorfak**), jelölés: $A \simeq B$, ha létezik olyan $f : A \to B$ függvény, amely növekvő, bijektív és f^{-1} növekvő. Ekkor az f-et **hasonlóság**nak (**izomorfizmus**nak) nevezzük.

Megjegyzés. Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett, akkor ebben a definícióban az f^{-1} növekvő feltétel elhagyható (Feladat).

Példák. 1) Az $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ és $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$ halmazok a szokásos rendezés szerint rendezett halmazok és hasonlók: vehető $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$.

2) Az $A = \{2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < 1\}$ és $B = \{1 < 2 < 4 < 5 < \cdots < 3\}$ rendezett halmazok hasonlók a következő hozzárendelés szerint: $f : A \to B$, $f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$, $f(n) = n$, ha $n \geq 4$.

3) Az $A = \{1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots\}$ és $B = \{2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < 1\}$ rendezett halmazok nem hasonlók, mert A-ban nincs legnagyobb elem, B-ben viszont van: az 1. Pontosabban, ha létezne egy $f : A \to B$ hasonlóság, akkor létezne $x_0 \in A : f(x_0) = 1$, innen $f(x_0+1) = y_0 \in B$ és $x_0 < x_0+1$ miatt $1 = f(x_0) \leq f(x_0+1) = y_0$, tehát $y_0 = 1$, $f(x_0) = f(x_0+1)$, ami ellentmond az f bijektivitásának.

4) Az $A = \{1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots\}$ és $B = \{2 < 4 < 6 < \cdots < 1 < 3 < 5 < \cdots\}$ rendezett halmazok nem hasonlók (B-ben minden páros szám kisebb minden páratlan számnál).

5) Az $(A = \{x, y, z, t\}, \leq)$ rendezett halmaz, ahol "$\leq$" az 5. fejezetben az első diagrammal adott rendezés: $x < y < t, x < z < t$, hasonló a $(A = \{x, y, z, t\}, \leq')$ rendezett halmazzal, ahol "$\leq'$" a következő : ebben a diagramban permutáljuk az x, y, z, t elemeket tetszőleges módon, például így: legyen $z <' y <' x, z <' t <' x$. Valóban, $f(x) = z, f(y) = y, f(z) = t, f(t) = x$ egy hasonlóság.

6) Az előbbi $(A = \{x, y, z, t\}, \leq)$ rendezett halmaz nem hasonló az 5. fejezet másik két diagramjával adott rendezett halmazokkal. Valóban, nézzük például az $x <' y <' z <' t$ teljes rendezést. Ha létezne egy $f : (A, \leq) \to (A, \leq')$ hasonlóság, akkor $x < y < t$ miatt $f(x) <' f(y) <' f(t)$ és $x < z < t$ miatt $f(x) <' f(z) <' f(t)$. Itt $f(x) = x, f(t) = t$, mert másképp $f(x), f(y), f(z), f(t)$ nem lennének különbözők. Ha $f(y) = y$ és $f(z) = z$, akkor $y <' z$ miatt $f^{-1}(y) = y < z = f^{-1}(z)$, ellentmondás, mert y és z nem hasonlíthatók össze a "$\leq$" szerint. Ha $f(y) = z$ és $f(z) = y$, akkor $y <' z$ miatt $f^{-1}(y) = z < y = f^{-1}(z)$, szintén ellentmondás.

7) Az $(\mathbb{N}, |)$ és $(\mathbb{N}, \leq)$ rendezett halmazok nem hasonlóak. Valóban, ha létezne egy $f : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$ hasonlóság, akkor legyen $f(2) = n, f(3) = m$, ahol $n \neq m$. Ha $n < m$, akkor $f^{-1}(n) = 2|3 = f^{-1}(m)$, ha pedig $m < n$, akkor $f^{-1}(m) = 3|2 = f^{-1}(n)$, mindkét esetben ellentmondás.

Hasonlóképpen belátható, hogy ha két rendezett halmaz hasonló és az egyik teljesen rendezett, akkor a másik is az (Feladat).

A hasonlósági reláció egy ekvivalenciareláció (Feladat). Értelmezés szerint egy rendezett halmaz **rendtípus**a a hozzá hasonló rendezett halmazok ekvivalenciaosztályát jelenti.

E definíció alapján ha két halmaz rendtípusa megegyezik, akkor a számosságuk is egyenlő. Ennek megfordítása nem igaz, ugyanis egy halmazt többféleképpen lehet rendezetté tenni, ezért egyenlő számosságú halmazok rendtípusai lehetnek különbözők. Igazolható például, hogy az $\aleph_0$ számosságnak kontinuum sok rendtípus felel meg.

Egy A jólrendezett halmaz rendtípusát **rendszám**nak nevezzük, jelölés: $\overline{A}$, tehát

$$\overline{A} = \{B \,:\, B \simeq A\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy halmaz jólrendezett, akkor teljesen rendezett.

Megjegyezzük itt, hogy igaz a következő, ún. jólrendezési tétel:

8.1. Tétel. Minden halmaz jólrendezhető, azaz minden X halmazhoz létezik egy, az X halmazon értelmezett jólrendezés. □

A továbbiakban a rendszámokkal foglalkozunk. Szokásos jelölések és elnevezések:

Az üres halmaz rendszáma 0, azaz $\overline{\emptyset} = 0$.

Az $\{1, 2, \cdots n\}$ halmaz rendszáma n.

Az $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ halmaz rendszáma ω: $\overline{\mathbb{N}} = \omega$.

Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \cdots\} \simeq \{0, 1, 2, \cdots\}$, ezért $\overline{\mathbb{N}_k} = \omega$, $\overline{\mathbb{N}_1} = \omega$, itt $\mathbb{N}_1 \equiv \mathbb{N}^*$.

Egy végtelen jólrendezett halmaz rendszámát **transzfinit** rendszámnak nevezzük.

8.2. Rendszámok rendezése

Legyenek $\alpha = \overline{A}$ és $\beta = \overline{B}$ rendszámok. Azt mondjuk, hogy α kisebb, mint β, jelölés: $\alpha < \beta$, ha létezik olyan $b \in B$, amelyre $A \simeq B_b$, ahol

$$B_b = \{y \in B \,:\, y < b\}$$

a B-nek egy **szakasz**a. Továbbá $\alpha \leq \beta$, ha $\alpha < \beta$ vagy $\alpha = \beta$.

8.2. Tétel. A "$<$" és a "$\leq$" relációk értelmezése nem függ a reprezentánsoktól és tetszőleges α, β, γ rendszámok esetén

(1) $\alpha \not< \alpha$.

(2) Ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \gamma$, akkor $\alpha < \gamma$ (tranzitivitás).

(3) Ha $\alpha < \beta$, akkor $\beta \not< \alpha$.

(4) A "$\leq$" rendezési reláció.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \overline{A}$, $\beta = \overline{B}$ és $A \simeq B_b$. Ha A' és B' jólrendezett halmazok és $A \simeq A'$, $B \simeq B'$, akkor létezik egy $g : B \to B'$ hasonlóság. Legyen $b' = g(b)$; ekkor $B_b \simeq B'_{b'}$, tehát $A' \sim B'_{b'}$ és a "$<$" értelmezése nem függ a reprezentánsoktól.

(1) Igazoljuk, hogy ha A jólrendezett és $a \in A$, akkor $A \not\simeq A_a$. Valóban, ha $f : A \to A_a$ hasonlóság, akkor $f(a) < a$, ezért a

$$C = \{x \in A : f(x) < x\}$$

nemüres részhalmaza A-nak. Legyen $a_0 = \min C$. Kapjuk, hogy $f(a_0) < a_0$, $f(f(a_0)) < f(a_0) < a_0$, tehát $f(a_0) \in C$, de ez ellentmond az a_0 minimalitásának.

(2) Legyen $\alpha = \overline{A}$, $\beta = \overline{B}$ és $\gamma = \overline{C}$. Ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \gamma$, akkor létezik $b \in B$ és $c \in C$ úgy, hogy $A \simeq B_b$ és $B \simeq C_c$. Legyen $g : B \to C_c$ egy hasonlóság és legyen $c' = g(b)$. Ekkor $B_b \simeq C_{c'}$, ahonnan $A \sim C_{c'}$ és $\alpha < \gamma$.

(3) Ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \alpha$, akkor (2) alapján $\alpha < \alpha$, ami ellentmond (1)-nek.

(4) Következik a fentiekből. □

Példák. A véges rendszámokra: $0 < 1 < 2... < n < ...$, továbbá $n < \omega$ minden n-re.

Az $A = \{1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots\}$ és $B = \{2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < 1\}$ halmazok rendszámaira $\overline{A} < \overline{B}$, mert $A \simeq B_1 \equiv \{n \in B : n < 1\}$.

8.3. Rendszámok összeadása

Legyen A_1 és A_2 két jólrendezett halmaz. Az

$$A_1 \coprod A_2 = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\})$$

diszjunkt unión definiáljuk a következő relációt:

$(a_1, 1) \leq (a_1', 1)$ minden $a_1, a_1' \in A_1, a_1 \leq a_1'$-re,

$(a_2, 2) \leq (a_2', 2)$ minden $a_2, a_2' \in A_2, a_2 \leq a_2'$-re,

$(a_1, 1) \leq (a_2, 2)$ minden $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ esetén.

Ekkor $(A_1 \amalg A_2, \leq)$ jólrendezett halmaz (Feladat) és ezt az A_1 és A_2 **rendezett diszjunkt unió**jának nevezzük.

Ha $\alpha = \overline{A_1}$ és $\beta = \overline{A_2}$ rendszámok, akkor ezek összege értelmezés szerint

$$\alpha + \beta = \overline{A_1 \coprod A_2},$$

ami nem függ a reprezentánsoktól (Feladat).

Példák. 1) Ha $A_1 = \{a < b < c\}$, $\overline{A_1} = 3$ és $A_2 = \{c < d\}$, $\overline{A_2} = 2$, akkor $A_1 \coprod A_2 = \{(a, 1) < (b, 1) < (c, 1) < (c, 2) < (d, 2)\}$, és $\overline{A_1 \coprod A_2} = 5$.

A rendszámok összeadása a természetes számok összeadásának kiterjesztése.

2) $1 + \omega = \omega$, mert pl. $A_1 = \{x\}$, $A_2 = \mathbb{N}^*$ esetén $A_1 \coprod A_2 = \{(x, 1) < (1, 2) < (2, 2) < (3, 2) < (4, 2) < \cdots\} \simeq \{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots\}$.

3) A $B = \{2 < 3 < 4 < 5 < \cdots < 1\}$ halmazra, lásd a fentiekben, $\omega < \overline{B} = \omega + 1$.

Itt $1 + \omega = \omega$ és $\omega < \omega + 1$, tehát $1 + \omega \neq \omega + 1$, a rendszámok összeadása nem kommutatív (!).

Hasonlóan, $2 + \omega = \omega$, $3 + \omega = \omega$, $n + \omega = \omega$ és $\omega < \omega + n$ minden $n \geq 1$ természetes számra (Feladat).

4) Ha $A_1 = \{2 < 4 < 6 < \cdots\}$, $A_2 = \{1 < 3 < 5 < \cdots\}$, akkor $\overline{A_1 \coprod A_2} \simeq \{2 < 4 < 6 < \cdots < 1 < 3 < 5 < \cdots\}$ és ennek rendszáma $\omega + \omega$.

8.3. Tétel. A rendszámok összeadásának tulajdonságai:

a) $(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)$ (asszociativitás).

b) Ha $\alpha_1 \leq \beta_1$ és $\alpha_2 \leq \beta_2$, akkor $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$.

c) $\alpha < \beta$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\gamma \neq 0$ rendszám, amelyre $\beta = \alpha + \gamma$.

d) Ha $\alpha < \beta$, akkor minden γ rendszám esetén $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ és $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Bizonyítás. b) Legyen $\alpha_i = \overline{A_i}$ és $\beta_i = \overline{B_i}$, ahol $i \in \{1, 2\}$. Mivel $\alpha_i \leq \beta_i$, léteznek az $f_i : A_i \to B_i$ injektív növekvő függvények úgy, hogy $f(A_i)$ egyenlő B_i-vel vagy B_i-nek egy szakaszával. Ekkor

$$f_1 \coprod f_2 : A_1 \coprod A_2 \to B_1 \coprod B_2, \quad (f_1 \coprod f_2)(a_i, i) = (f_i(a_i), i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

injektív növekvő függvény és $\mathrm{Im}(f_1 \amalg f_2)$ egyenlő $B_1 \amalg B_2$-vel vagy $B_1 \amalg B_2$-nek egy szakaszával. Következik, hogy $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \beta_1 + \beta_2$.

c) Legyen $\alpha = \overline{A}$ és $\beta = \overline{B}$. Mivel $\alpha < \beta$, létezik $b \in B$ úgy, hogy $A \simeq B_b$. Ekkor $B \setminus B_b \neq \emptyset$. Legyen $\gamma = \overline{B \setminus B_b} \neq 0$. Mivel $B_b \cap (B \setminus B_b) = \emptyset$, és mivel B_b minden eleme kisebb $B \setminus B_b$ minden eleménél, következik, hogy $B \simeq B_b \amalg (B \setminus B_b)$, tehát $\beta = \alpha + \gamma$.

Fordítva, legyen $\beta = \alpha + \gamma$, ahol $\alpha = \overline{A}, \beta = \overline{B}$ és $\gamma = \overline{C}, C \neq \emptyset$. Feltételezhetjük, hogy $A \cap C = \emptyset, B = A \cup C$ és A minden eleme kisebb C minden eleménél. Ha $c_0 = \min C$, akkor $A = B_{c_0}$, tehát $\alpha < \beta$.

d) Legyen $\alpha < \beta$. A c) pont alapján következik, hogy $\beta = \alpha + \delta$, ahol $\delta \neq 0$. Ekkor, használva az asszociativitást: $\gamma + \beta = \gamma + (\alpha + \delta) = (\gamma + \alpha) + \delta$, s innen $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$. A második összefüggés a b) pont egy speciális esete. $\square$

Megjegyzés. Ha $\alpha < \beta$ és $\gamma \neq 0$, akkor az $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ egyenlőtlenség nem feltétlenül szigorú, például: $1 < 2$ és $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$.

8.4. Rendszámok szorzása

Legyen A és B két jólrendezett halmaz. Az

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Descartes-szorzaton definiáljuk a következő relációt:

$$(a, b) \leq (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad (a < a' \quad \text{vagy} \quad (a = a' \text{ és } b \leq b')).$$

8.4. Tétel. $(A \times B, \leq)$ jólrendezett halmaz.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy $(A \times B, \leq)$ rendezett halmaz.

A reflexivitás és az antiszimmetria evidens. Tranzitivitás: legyen $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times B$ úgy, hogy $(a, b) \leq (a', b')$ és $(a', b') \leq (a'', b'')$.

I. eset: $a < a'$ és $a' < a''$. Ekkor $a < a''$, tehát $(a, b) \leq (a'', b'')$.

II. eset: $a < a'$ és $a' = a''$. Ekkor $a < a''$, tehát $(a, b) \leq (a'', b'')$.

III. eset: $a = a'$ és $a' < a''$, hasonlóképpen.

IV. eset: $a = a'$ és $a' = a''$. Ekkor $b \leq b'$ és $b' \leq b''$, tehát $b \leq b''$ és $(a, b) \leq (a'', b'')$.

Megmutatjuk, hogy $(A \times B, \leq)$ jólrendezett. Legyen $M \subseteq A \times B$, $M \neq \emptyset$ és legyenek $p_A : A \times B \to A$, $p_B : A \times B \to B$ a kanonikus projekciók, ahol $p_A((a, b)) = a$, $p_B((a, b)) = b$. Ekkor $p_A(M) \neq \emptyset$, jelölje a_0 ennek legkisebb elemét: $a_0 = \min p_A(M)$. Továbbá legyen $B' = \{b \in B \ : \ (a_0, b) \in M\} \neq \emptyset$, ennek is létezik legkisebb eleme, legyen $b_0 = \min B'$. Akkor nyilvánvaló, hogy $(a_0, b_0) = \min M$. $\square$

Ezt a relációt **lexikografikus rendezés**nek nevezzük.

Ha $\alpha = \overline{A}$ és $\beta = \overline{B}$ rendszámok, akkor ezek szorzata értelmezés szerint

$$\alpha\beta = \overline{B \times A},$$

ahol a $B \times A$ Descartes szorzat (a halmazok fordított sorrendjében !) a lexikografikus rendezéssel értendő.

Az $A \times B$ halmaz ún. **antilexikografikus rendezés**e, jelölés $\preceq$, a $B \times A$ halmazon vett lexikografikus rendezés: $(a, b) \preceq (a', b') \Leftrightarrow (b, a) \leq (b', a')$, azaz

$$(a, b) \preceq (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad (b < b' \quad \text{vagy} \quad (b = b' \text{ és } a \leq a')).$$

Következik, hogy ha A és B jólrendezett, akkor $(A \times B, \preceq)$ is jólrendezett. Jelölés: $A \overset{\circ}{\times} B = (A \times B, \preceq)$. A rendszámok szorzata tehát így is definiálható:

$$\alpha\beta = \overline{A \overset{\circ}{\times} B}.$$

Az $\alpha\beta$ szorzat értelmezése nem függ a reprezentánsoktól. Valóban, könnyen belátható, hogy ha $f : A \to A'$ és $f : B \to B'$ hasonlóságok, akkor

$$f \times g : A \times B \to A' \times B', \quad f((a, b)) = (f(a), g(b))$$

is hasonlóság - a $\leq$ és a $\preceq$ szerint is - (Feladat).

8.5. Tétel. A rendszámok szorzásának tulajdonságai:

a) $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ (asszociativitás).

b) $\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$ (bal oldali disztributivitás).

c) Ha $\alpha < \beta$ és $\gamma \neq 0$, akkor $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

d) Ha $\alpha \leq \beta$ és γ tetszőleges, akkor $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Bizonyítás. a) Tekintsük a

$$\phi : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C), \quad ((a,b),c) \mapsto (a,(b,c))$$

bijektív függvényt. Elég igazolni, hogy

$$((a,b),c) \leq ((a',b'),c') \quad \Longleftrightarrow (a,(b,c)) \leq (a',(b',c')).$$

Valóban, $((a,b),c) \leq ((a',b'),c') \Longleftrightarrow (a < a') \vee (a = a', b < b') \vee (a = a', b = b', c \leq c') \Longleftrightarrow (a,(b,c)) \leq (a',(b',c'))$.

b) Legyen

$$\psi : (A_1 \coprod A_2) \times B \to (A_1 \times B) \coprod (A_2 \times B), \quad ((a,i),b) \mapsto ((a,b),i),$$

ahol $a \in A_i, i \in \{1,2\}$ és $b \in B$. Nyilvánvaló, hogy ψ bijektív és elég igazolni, hogy

$$((a,i),b) \leq ((a',i'),b') \quad \Longleftrightarrow ((a,b),i)) \leq ((a',b'),i').$$

Valóban, $((a,i),b) \leq ((a',i'),b') \Longleftrightarrow ((a,i) < (a',i') \vee ((a,i) = (a',i'), b \leq b') \Longleftrightarrow (a < a', i = i') \vee (i < i') \vee (a = a', b \leq b', i = i') \Longleftrightarrow ((a,b) \leq (a',b'), i = i') \vee (i < i') \Longleftrightarrow ((a,b),i)) \leq ((a',b'),i')$.

c) Legyen $\beta = \alpha + \delta$, ahol $\delta \neq 0$. Ekkor $\gamma\beta = \gamma(\alpha + \delta) = \gamma\alpha + \gamma\delta$, s mivel $\gamma\delta \neq 0$, következik, hogy $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

d) Következik a definíciókból.

A rendszámok szorzása nem kommutatív. Például, megmutatjuk, hogy $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

Definíció szerint: $2 \cdot \omega = \overline{\mathbb{N}^* \times \{1,2\}}$, ahol

$$\overline{\mathbb{N}^* \times \{1,2\}} = \{(1,1) < (1,2) < (2,1) < (2,2) < \cdots < (n,1) < (n,2) < \cdots\}.$$

Belátható, hogy

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \times \{1,2\} = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}, 1\right), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \left(\frac{n}{2}, 2\right), & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

hasonlóság, tehát $2 \cdot \omega = \omega$.

Másrészt, $\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1+1) = \omega + \omega > \omega$.

A jobb oldali disztributivitás általában nem érvényes, mert például

$(\omega+1)\cdot 2 = (\omega+1)(1+1) = (\omega+1)+(\omega+1) = \omega+(1+\omega)+1 = (\omega+\omega)+1 = \omega\cdot 2+1 \neq$
$\neq \omega \cdot 2 + 2$.

9. Axiomatikus elméletek

9.1. Nemformális axiomatikus elméletek

Ha egy (matematikai, fizikai vagy más) elméletet, ún. **intuitív elmélet**et axiomatizálni akarunk, akkor először is tisztázni kell, hogy milyen fogalmakat kívánunk bevezetni és milyen - ezek közötti - alapvető összefüggéseket tekintünk igaznak. Szükséges ekkor általában az, hogy más, már meglévő elméleteket is figyelembe vegyünk. A matematikán belüli nemformális elméletek általában a matematikai logikára és a halmazelméletre támaszkodnak. Más nemformális elméletek, pl. a fizikában vagy a közgazdaságtanban, felhasználhatják ezen kívül pl. a klasszikus matematika további fejezeteit is.

Az axiomatikus elmélet felépítésének lépései:

1. Az intuitív elmélet állításainak (tételeinek) logikai sorrendbe állítása. Ha egy T tétel bizonyításához szükséges az S állítás, akkor T az S után kerül. Azoknak az állításoknak a meghatározása, amelyek bizonyítása nem alapul korábbi tételeken, ezek lesznek az **axiómák**.

2. A fogalmak ugyanilyen elv alapján történő rendezése, a **definiálatlan** és a **definiált** fogalmak meghatározása.

3. Szimbólumok megadása az intuitív elmélet alapvetőnek tartott fogalmaira, ezek az ún **primitív szimbólumok**. Szimbólumok megadása az elmélet további fogalmaira (**definiált szimbólumok**), amelyek jelentését explicite megadjuk a primitív szimbólumok segítségével.

4. Az axiómák deklarásása. A definiálatlan fogalmak bizonyos tulajdonságait, amelyek szükségesek a tételek levezetéséhez, szintén axiómákként deklaráljuk.

5. Az intuitív elmélet állításainak és bizonyításainak lefordítása a szimbólumok által meghatározott nyelvre.

A nemformális axiomatizálás céljai:

1. a különböző intuitív elméletek közös alapjainak feltárása;

2. egy elméleten belül feltárni mindazt, ami az elmélet alapfogalmaiból és alapösszefüggéseiből következik.

Példa. Legyen $(B(X), \circ)$, ahol $B(X)$ az X halmaz önmagába való összes $f : X \to X$ bijektív leképezéseinek a halmaza, $\circ$ pedig a függvényösszetétel.

Legyen továbbá $(\mathbb{Z}, +)$ a egész számok halmaza az összeadási művelettel.

Tudjuk, hogy mindkét művelet bináris művelet, mindkettő asszociatív, mindkét halmazban létezik semleges elem az adott műveletekre nézve ($\mathbf{1}_X \in B(X)$ és $0 \in \mathbb{Z}$) és minden $f \in B(X)$ ill. $x \in \mathbb{Z}$ elemnek létezik szimmetrikus eleme ($f^{-1} \in B(X)$ és $-x \in \mathbb{Z}$).

E két rendszer hasonló tulajdonságai egy nemformális elméletben, a csoportelméletben fogalmazhatók meg. Itt a primitív szimbólumok: egy tetszőleges nemüres G halmaz, egy G-n értelemzett bináris művelet (pl. multiplikatív írásmóddal), továbbá egy $e \in G$ elem. Az axiómák a következők lesznek:

(G1) $\forall a, b, c \in G \, : \, (ab)c = a(bc)$;

(G2) $\forall a \in G \, : \, ae = ea = a$;

(G3) $\forall a \in G \, \exists a' \in G : \, aa' = a'a = e$.

A csoportelmélet tételei:

(T1) G-ben pontosan egy semleges elem van.

(T2) G-ben minden elemnek pontosan egy szimmetrikusa van.

(T3) Minden $a, b \in G$-re $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

stb.

A matematikai elméletek egy jelentős része formalizálható (axiomatizálható) egy nemüres X halmaz, az X-en értelmezett műveletek és relációk, továbbá X bizonyos elemei segítségével. Itt a műveletek, a relációk ill. a kitüntetett elemek halmazai közül egyesek üresek is lehetnek.

Matematikai struktúrán egy olyan

$$\mathcal{M} = (S, (F_i)_{1 \leq i \leq k}, (\rho_i)_{1 \leq i \leq \ell}, (s_i)_{1 \leq i \leq m})$$

rendezett négyest értünk, ahol S egy nemüres halmaz: a struktúra tartóhalmaza, $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ adott számok, F_i és ρ_i adott egy-, két-, vagy többváltozós műveletek illetve relációk az S-en és $s_i \in S$.

Az axiomatizálás során halmazelméleti predikátumokat használunk. Például a rendezett halmaz definíciója:

" Az $\mathcal{M}$ struktúra akkor és csak akkor rendezett halmaz, ha ez egy (S, ρ) struktúra, ahol ρ egy bináris reláció és ρ reflexív, ρ tranzitív és ρ szimmetrikus." Itt a "... rendezett halmaz" predikátum szerepel.

Ha egy $\mathcal{E}$ elméletet egy $\mathcal{M}$ matematikai struktúrán halmazelméleti predikátumok segítségével axiomatizálunk, akkor az $\mathcal{E}$ elmélet alapfogalmait jelentő szimbólumok éppen az $S, F_1, F_2, \cdots, \rho_1, \rho_2, \cdots, s_1, s_2, \cdots$ lesznek. Ezek az elmélet megfogalmazásánál nincsenek meghatározva, eltekintve attól, hogy bizonyos feltételeket kielégítenek, pl. F_1 bináris művelet S-en. Ha mindegyiknek konkrét jelentést adunk, akkor egy konkrét $\mathcal{M}$ struktúrát kapunk. Ha ez kielégíti a predikátumot, azaz teljesülnek rá az adott axiómák, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ elmélet egy **modell**je. Például $(B(X), \circ)$ és $(\mathbb{Z}, +)$ a csoportelmélet modelljei.

Azt mondjuk, hogy egy elmélet **konzisztens** vagy **ellentmondás mentes**, ha nem tartalmaz egyetlen olyan formulát sem, hogy A és $\neg A$ egyaránt tétel

Azt mondjuk, hogy egy elmélet **teljes**, ha "bizonyos célok megvalósítására elegendő tétellel rendelkezik". Másképpen: egy elmélet teljes, ha minden igaz ítélete bizonyítható.

9.2. Formális axiomatikus elméletek.

A nemformális axiomatikus elméletekben a tételek bizonyítása során a fogalmakat jelentés nélkülieknek tekintjük, amelyeknek pusztán az axiómákban rögzített tulajdonságuk van. A tételek és bizonyítások egy természetes nyelv (pl. a magyar nyelv) mondataiként jelennek meg, gyakran szimbolizált formában. A logikai fogalmakat a szokásos (mindennapi) értelemben használjuk, míg a következtetéseknél használt logikai elvek éppen azok, amelyek általánosan elfogadottak a (klasszikus) matematikában.

Az elmélet axiomatizálása azonban tovább folytatható a használt logikai fogalmakra és logikai elvekre vonatkozóan. Axiómaként megadhatók a következtetési szabályok és a formulaalkotás szabályai. Az eredmény egy, az elmélet tartalmától való teljes elvonatkoztatás (**absztrahálás**), csak az elmélet formája marad meg. Azt mondjuk, hogy ez egy **formális elmélet**. Ez pontosabban megadható az **algoritmus** (**effektív eljárás**) fogalmának használatával.

10. A halmazelmélet egy axiomatikus felépítése

Az eddigiekben az ún. **naiv halmazelmélet**re építettünk, alapfogalmaknak tekintve a halmazt, az elemet és az elemnek a halmazhoz való hozzátartozását. Ezeket a **definiálatlan** (vagy **elsődleges**) **fogalmak**at használva vezettük be az újabb, immár **definiált fogalmak**at, mint például a halmazok uniójának és metszetének, vagy a relációnak a fogalmát. Azt mondottuk, hogy egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei.

A Bevezetésben említettük, hogy ennek az elméletnek bizonyos korlátai vannak, lásd halmazelméleti paradoxonok (antinómiák).

A következő tétel a Bevezetésben is szerepel, ott más bizonyítással.

10.1. Tétel. Nincs olyan halmaz, amely minden halmazt elemként tartalmaz (a "halmazok halmaza" ellentmondásos fogalom).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen U halmaz. Akkor, lásd 7.6. Tétel, $|U| < |\mathcal{P}(U)|$, ahol $\mathcal{P}(U)$ az U hatványhalmaza. Ugyanakkor $\mathcal{P}(U) \in U$ és $\mathcal{P}(U) \subseteq U$ is igaz, ez utóbbi alapján $|\mathcal{P}(U)| \leq |U|$. Innen $|U| < |U|$ következik, ami ellentmondás. □

Helytelen tehát azt mondani például, hogy a $\sim$ reláció egy ekvivalenciareláció "az összes halmaz U halmazán".

Helyesen: egy A halmaz összes részhalmazainak $\mathcal{P}(A)$ halmazán a $\sim$ reláció egy ekvivalenciareláció.

A továbbiakban vázoljuk a halmazelmélet megalapozásának egy olyan útját, amely Neumann Jánostól (John von Neumann, 1903-1957) származik és amelynek egyik alapfogalma a halmaznál általánosabb fogalom: az osztály fogalma.

Alapfogalmak: az **osztály** fogalma, jelölés: $A, B, C, \cdots$ és egy **összefüggés**, jelölés: $\in$, amely két osztály között előfordulhat. Ezek formálisan egyszerű szimbólumokként tekintendők.

Ha az osztályokat jelentő A és B szimbólumok közé a $\in$ szimbólumot írjuk: $A \in B$, akkor azt mondjuk, hogy az A osztály **elem**e a B osztálynak.

Az A osztály **részosztály**a a B osztálynak, ha A minden X eleme B-nek is eleme, azaz $\forall X (X \in A \rightarrow X \in B)$, jel. $A \subseteq B$.

Egy A osztályt **halmaz**nak nevezünk, ha van olyan B osztály, hogy $A \in B$.

I. AXIÓMA. Egy A osztályt egyértelműen meghatároznak az elemei.

Ennek megfelelően:

Az A és B osztályokat **egyenlő**nek mondjuk, ha mindkettőnek ugyanazok az elemei. Jelölés: $A = B$.

II. AXIÓMA. Ha P egy osztályokra vonatkozó tulajdonság (kijelentés), akkor létezik olyan C osztály, amelynek elemeit azok és csak azok az X halmazok képezik, amelyekre $P(X)$ igaz. Jelölés: $C = \{X : P(X)\}$.

A II. axióma bizonyos osztályok létezését, az I. axióma az osztályok unicitását biztosítja. Például, jelentse $P(X)$ azt, hogy az X osztály halmaz. A két axióma szerint létezik és egyértelmű az $\{X : P(X)\}$ osztály, ennek minden halmaz eleme, és ez az osztály nem halmaz a fenti Tétel szerint.

További osztályokat értelmezünk így:

(i) Létezik egyetlen $\{X : X \neq X\}$ osztály, neve **üres osztály**, jelölés: $\emptyset$.

(ii) Ha A egy halmaz, akkor létezik egyetlen $\{X : X = A\}$ osztály, jelölés: $\{A\}$.

(iii) Ha A és B két halmaz, akkor létezik egyetlen $\{X : X = A \vee X = B\}$ osztály, jelölés: $\{A, B\}$.

(iv) Ha A egy halmaz, akkor létezik egyetlen $\{X : X \subseteq A\}$ osztály, neve A **részhalmazosztály**a, jelölés: $\mathcal{P}(A)$.

(v) Ha A egy osztály, akkor létezik egyetlen $\{X : X \in Y$ valamely $Y \in A$ esetén $\}$ osztály, ezt A **unió**jának nevezzük, jelölés: $\cup A$.

(vi) Ha A egy osztály, akkor létezik egyetlen $\{X : X \in Y$ minden $Y \in A$ esetén $\}$ osztály, ezt A **metszet**ének nevezzük, jelölés: $\cap A$.

Megjegyzés: Ha A_1 és A_2 két halmaz, akkor (iii) szerint létezik az $A = \{A_1, A_2\}$ osztály. Ekkor (v) és (vi) szerint $\cup A = \{X : X \in A_1 \vee X \in A_2\}$, amelynek szokásos jelölése: $A_1 \cup A_2$, és $\cap A = \{X : X \in A_1 \wedge X \in A_2\}$, amelynek szokásos jelölése: $A_1 \cap A_2$.

A további axiómák:

III. AXIÓMA. Az üres osztály halmaz.

IV. AXIÓMA. Ha A és B két halmaz, akkor az $\{A, B\}$ osztály halmaz.

V. AXIÓMA. Egy halmaz minden részosztálya halmaz.

VI. AXIÓMA. Egy halmaz $\mathcal{P}(A)$ részhalmazosztálya halmaz.

VII. AXIÓMA. Ha A halmaz, akkor az $\cup A$ osztály is halmaz.

Ha A halmaz, akkor $\cap A$ is halmaz (ez nem axióma, az előbbiekből levezethető).

$\{A\}$ és $\{A, B\}$ definíciója, valamint az I. axióma alapján: $\{A, A\} = \{A\}$. A IV. axióma szerint, ha A halmaz, akkor $\{A\}$ is halmaz. Ha tehát A és B halmazok, akkor $\{A\}$ és $\{A, B\}$ is halmazok, s így (iii) szerint létezik egyetlen $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ osztály, amely a IV. axióma szerint halmaz. Ezt (A, B) **rendezett halmazpár**nak nevezzük.

E fogalmak birtokában értelmezhető osztályok Descartes-szorzata. Nevezetesen: ha A és B két osztály, akkor definíció szerint A-nak és B-nek minden X illetve Y eleme halmaz, s így az (X, Y) halmazpár halmaz. Az I. és II. axiómák szerint létezik egyetlen $\{(X, Y) : X \in A \wedge Y \in B\}$ osztály, amelyet A és B **Descartes-szorzat**ának nevezzük, jelölés: $A \times B$.

Következik, hogy a bináris reláció és a függvény fogalma is értelmezhető osztályok esetén, pontosan úgy, mint halmazokra.

Legyen A és B két osztály és $f : A \to B$ egy függvény. Ha $X \in A$, akkor legyen $f(X)$ az X képeleme B-ben. Akkor az I. és II. axióma, valmint a részosztály definíciója alapján következik, hogy létezik B-nek egyetlen $\{f(X) : X \in A\}$ részosztálya, ennek neve az A **osztály képe** f-ben, jelölés: $f(A)$.

VIII. AXIÓMA. Legyen A és B két osztály és $f : A \to B$ egy függvény. Ha A halmaz, akkor B-nek $f(A)$ részosztálya is halmaz.

A következő axióma végtelen halmazok létezését garantálja:

IX. AXIÓMA. A természetes számok halmazt képeznek, jelölés: $\mathbb{N}$.

Univerzumnak nevezünk egy olyan $\mathcal{U}$ halmazt, amelynek $\emptyset$ és $\mathbb{N}$ elemei és amelynek elemeire (ezek halmazok !) a IV. - VIII. axiómák által biztosított szokásos konstrukciók alapján $\mathcal{U}$-beli elemeket kapunk.

X. AXIÓMA. Minden halmaz eleme valamely univerzumnak.

XI. AXIÓMA. (Zermelo-féle kiválasztási axióma) Nemüres halmazok tetszőleges, páronként diszjunkt $H = (A_i)_{i \in I}$ rendszere esetén van olyan K halmaz, amelynek egy és csak egy közös eleme van H minden tagjával: $K \cap A_i = \{a_i\}$, $\forall i \in I$.

A 6.4. szakaszban bizonyított második Tétel szerint minden szürjektív függvénynek van jobboldali inverz függvénye. A bizonyítás során hallgatólagosan felhasználtuk az előbbi kiválasztási axiómát. Az alábbiakban megadunk egy tételt, amelyben néhány, ezzel egyenértékű állítás szerepel:

10.2. Tétel. A következő állítások egyenértékűek:

1) (Kiválasztási axióma) Egy más megfogalmazásban: Ha $I \neq \emptyset$, $(A_i)_{i \in I}$ egy halmazrendszer, $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, akkor létezik egy olyan $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ függvény, melyre $f(i) \in A_i, \forall i \in I$.

2) (Zorn-lemma) Legyen $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz. Ha minden $L \subseteq A$ teljesen rendezett részhalmaznak van felső korlátja, akkor minden $a \in A$ esetén létezik olyan $m \in A$ maximális elem, hogy $a \leq m$.

3) (Hausdorff-féle láncaxióma) Ha $(A, \leq)$ egy rendezett halmaz és $L \subseteq A$ egy lánc (teljesen rendezett részhalmaz), akkor létezik olyan $L' \subseteq A$ maximális lánc, hogy $L \subseteq L'$.

4) (Zermelo jólrendezési tétele) Minden A halmaz esetén létezik egy olyan "$\leq$" rendezési reláció, hogy $(A, \leq)$ jólrendezett halmaz.

5) Minden szürjektív függvénynek van jobboldali inverz függvénye. $\square$

11. Kijelentéslogikai és predikátumlogikai fogalmak

11.1. További logikai műveletek. Az 1. fejezetben megadtuk a kijelentések, valamint a következő logikai műveletek definícióit: negáció, diszjunkció, konjunkció, implikáció, ekvivalencia. Ezek közül a negáció egyváltozós művelet, a többi 2-2 változós. További három, gyakrabban használt kétváltozós logikai művelet:

Kizáró diszjunkció (antivalencia, Birkhoff-féle művelet), jele: $p\nabla q$, olvasd: "p kizárja q-t", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül pontosan az egyik igaz.

Köznyelvi példa ennek használatára: "A kapott pénzen vagy egy könyvet vagy egy CD-t vásárolok."

Összeférhetetlenséget kifejező diszjunkció, röviden: **összeférhetetlenség** (Sheffer-féle művelet), jele:$p \mid q$, olvasd:. "p összeférhetetlen q-val", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül legfeljebb az egyik igaz.

Például, "Vagy beszél az ember, vagy eszik."

"Sem-sem" művelet (Webb-féle művelet), jele: $p \mid\mid q$, olvasd:. "Sem p, sem q", amely akkor és csak akkor igaz, ha p és q közül az egyik sem igaz.

Például, "Sem ma, sem holnap nem érek rá."

Táblázat segítségével az előbbi definíciók a következők:

p	q	$p\nabla q$	$p \mid q$	$p \mid\mid q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

Tétel. Az eddigi logikai műveletek mind kifejezhetők a negáció, a diszjunkció és a konjunkció műveletekkel. Pontosabban:

i) $|p \to q| = |\neg p \vee q)|$,

ii) $|p \leftrightarrow q| = |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)|$,

iii) $|p\nabla q| = |(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)|$,

v) $|p \mid q| = |\neg(p \wedge q)|$,

vi) $|p \mid\mid q| = |\neg(p \vee q)|$.

Bizonyítás. Táblázat segítségével, lásd 1. fejezet, Tétel.

Ennél több is igaz. Mivel a diszjunkció illetve a konjunkció megadható a másik művelet segítségével: $|p \vee q| = |\neg(\neg p \wedge \neg q)|$, $|p \wedge q| = |\neg(\neg p \vee \neg q)|$, lásd de Morgan képletek, ezért a definiált műveletek mind megadhatók a negáció és a diszjunkció (vagy a negáció és a konjunkció) segítségével. Például, az ekvivalencia így:

$$|p \leftrightarrow q| = |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))| =$$

$$= |(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)| = |\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)|.$$

Az eddigi logikai műveletek mindegyike, a negációt leszámítva, 2-változós, hiszen 2 különböző kijelentésváltozó szerepel bennük. A negáció 1-változós. Általában egy n különböző kijelentésváltozótól függő n-változós kijelentéslogikai műveletet úgy értelmezünk, hogy megadjuk 2^n soros logikai értéktáblázatát. Következik, hogy összesen 2^{2^n} számú n-változós kijelentéslogikai művelet definiálható. Ha $n = 2$, akkor a 2-változós műveletek száma $2^{2^2} = 16$.

Igaz a következő is:

Tétel. Minden n-változós ($n \geq 1$) kijelentéslogikai művelet kifejezhető a negáció és a konjunkció (diszjunkció) segítségével.

Bizonyítás. Legyen pl. $n = 3$ és határozzuk meg azt a 3-változós A műveletet, amelyre:

p	q	r	A
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	h
h	h	h	i

Válasszuk ki azokat a sorokat, amelyekre A igaz. Ezekben a sorokban írjuk le a kijelentésváltozókat, ha ezek értéke 1 és negáljuk ezeket, ha ezek értéke 0. Vegyük ezeknek a konjunkcióját, majd az így kapott konjunkcióknak a diszjunkcióját. Azt állítjuk, hogy ez megadja az A-t:

$$A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r). \tag{1}$$

Valóban, jelölje B az (1) jobb oldalát. Tekintsük a táblázat k-adik olyan sorát, amelyre A igaz. Akkor a felírt k-adik zárójel értéke i, a többi h, ezért $|B| = i$. Továbbá minden olyan sorra, ahol A hamis, minden felírt zárójel értéke h, így $|B| = h$. Kapjuk, hogy $B = A$. Továbbá - ahogy már láttuk - a diszjunkció, illetve a konjunkció megadható a másik művelet és a negáció segítségével.

Megjegyzés. Azonosságaink alkalmazásával (1)-et egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$A = [(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \vee [(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) =$$

$$= [(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)] \vee [(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) =$$

$$= (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r), \tag{2}$$

11.2. Kijelentéslogikai formulák. Írjuk fel a következő összetett kijelentésnek a szerkezetét: "Amennyiben Kiss vagy Nagy tanár úr elutazik, a fizika helyett akkor lesz matematika, ha Joó tanár úrnak nincs órája."

Először az elemi kijelentésekre **kijentésváltozó**kat vezetünk be:

p : "Kiss tanár úr elutazik."
q : "Nagy tanár úr elutazik."
r : "A fizika helyett matematika lesz."
s : "Joó tanár úrnak órája van."

Ezután – megállapítva a műveletek sorrendjét – felírjuk a kijelentés szerkezetét:

$$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg s).$$

A kijelentések szerkezetének, ún. durvaszerkezetének így történő felírását **formalizálás**nak, a kapott jelsorozatot (képletet) pedig **formulá**nak nevezzük.

Látható, hogy a durvaszerkezet csupán formális séma, tehát nem használja ki sem a kijelentések tartalmát, sem a belső szerkezetét.

A formulákat nagybetűkkel jelöljük, például:

$$A = (p \vee q) \to (r \leftrightarrow \neg s).$$

Más példa. "Ha 12 osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal." durvaszerkezete $B = (p \wedge q) \to r$, ahol p :"12 osztható 2-vel", q :"12 osztható 3-mal", r :"12 osztható 6-tal".

A kijelentéslogika **szimbólum**ai a következők:

a) a kijelentésváltozók jelei: $p, q, ...,$

b) a logikai műveletek jelei: $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow,$

c) zárójelpárok: $(,)$, ezek a műveletek hatáskörét, sorrendjét és egyértelműségét biztosítják.

A **kijelentéslogika formulái** így definiálhatók:

1. a kijelentésváltozók jelei formulák,
2. ha A, B formulák, akkor $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ is formulák,
3. minden formula előáll véges sok lépésben az 1. és 2. alakú formulákból.

További példák formulákra: $C = ((p \vee \neg q) \vee r) \to (s \wedge \neg s)$, $D = ((p \to q) \to r) \vee (s \wedge r)$.

Nem formulák például a következők: $p \wedge (q \to \wedge r)$, $(pq \wedge (r \wedge p \neg q)$.

Megjegyzések. A 2.-ben szereplő zárójelpárok akkor lényegesek, ha ezek a formulák nagyobb formulák részeiként szerepelnek. Befejezett formulák esetében a külső zárójelpárok elhagyhatók. Ha azt is jelölni akarjuk, hogy az A formulát a $p_1, \dots, p_n$ kijelentésváltozókból képeztük, akkor az $A(p_1, \dots, p_n)$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy B **részformulája** az A kijelentéslogikai formulának, ha B előáll A képzése során.

Példa. $\overline{(p \wedge q) \vee \overline{r}} \to (t \vee p)$ formulának $p \wedge q$, $t \vee p$ részformulái de $p \to (t \vee p)$ nem.

Helyettesítésről beszélünk, ha egy A formulában valamely p kijelentésváltozó vagy R részformula helyére egy C formulát írunk. Jelölés: $A(C/p)$, illetve $A(C/B)$).

Különböző kijelentéseknek lehet egymással azonos a szerkezete. Például, a fenti A formula az alábbi kijelentésnek is a szerkezete:

"Ha TV-t nézek vagy strandolok, akkor a vizsgán csak abban az esetben megyek át, ha nem húzok nehéz tételt."

Ez a formalizálás fordított eljárása: a kijelentésváltozókhoz konkrét kijelentéseket rendelünk. Ekkor azt mondjuk, hogy megadjuk a formula egy **szöveges interpretációját**.

Ha a formulában szereplő kijelentésváltozóknak a logikai értékét adjuk meg, akkor logikai értékekkel adott interpretációról, röviden **interpretáció**ról beszélünk.

A fenti A formula egy interpretációja: $|p| = 1, |q| = 0, |r| = 1, |s| = 0$.

Négy változó esetén az interpretációk száma: $2^4 = 16$. Egy n-változós formulának 2^n számú interpretációja van.

Ha egy A formula valamely interpretációjára $|A| = 1$ (illetve $|A| = 0$), akkor azt mondjuk, hogy a tekintett interpretáció az A-t **igazzá** (illetve **hamissá**) **teszi**.

Az A formulát **kielégíthető**nek (**kielégíthetetlen**nek) nevezzük, ha van (nincs) olyan interpretációja, amely igazzá teszi.

Azonosan igaz formulának vagy **tautológiá**nak nevezünk egy A formulát, ha azt minden interpretáció igazzá teszi, jelölés: $|A| \equiv 1$ vagy $A = \mathbf{1}$ vagy $\models A$.

Egy A formula **azonosan hamis** vagy **kontradikció**, ha azt minden interpretáció hamissá teszi (ez nem más, mint a kielégíthetetlen formula), jelölés : $|A| \equiv 0$ vagy $A = \mathbf{0}$.

A tautológia jelölése tehát **1**, a kontradikció jelölése **0**.

A kielégíthető, de nem azonosan igaz formulákat **kontingens formulá**knak is nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az A és B formulák **egyenértékűek** vagy **logikailag ekvivalensek**, ha $A \leftrightarrow B$ tautológia, azaz $|A \leftrightarrow B| \equiv 1$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$ vagy $|A| \equiv |B|$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha az A-ban és B-ben szereplő összes kijelentésváltozó minden interpretációjára $|A| = |B|$.

Példaként vizsgáljuk meg a következő formulákat:

$A = p \wedge \neg p$, $B = q \vee \neg q$, $C = p \rightarrow p$, $D = p \rightarrow q$, $E = \neg p \vee q$, $F = p \leftrightarrow \neg p$.

Ezek közül B és C tautológia, A és F kontradikció, D és E kontingens formulák. Igaz az is, hogy e párok egyenértékűek.

Tetszőleges A formulára $\overline{A} \vee A$ tautológia és $\overline{A} \wedge A$ kontradikció. Továbbá A tautológia akkor és csak akkor, ha $\overline{A}$ kontradikció.

Matematikai tételekben a logikai ekvivalencia legtöbbször az alábbi formákban jelentkezik: *ha A, akkor B és ha B, akkor A; A elégséges és szükséges feltétele B-nek; B akkor és csak akkor, ha A; B pontosan akkor, ha A; A ekvivalens B-vel.*

Az "A egyenértékű B-vel" egy, a formulák körében értelmezett reláció, jelölés: $A \Leftrightarrow B$, míg az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \leftrightarrow q$, $A \leftrightarrow B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\Leftrightarrow$ reláció egy ekvivalenciareláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Bizonyítás. Feladat.

Ha logikailag ekvivalens formulákban a kijelentésváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítjük, akkor ismét logikailag ekvivalens formulákhoz jutunk.

11.3. Normálformák. Ha adott egy kijelentéslogikai formula, akkor elkészíthetjük a hozzátartozó igazságtáblázatot. Tekintsük most a fordított feladatot: adott egy A formulának az igazságtáblázata. Adjuk meg az A formulát! Lásd pl. az 5.1. szakasz végén adott táblázatot. Az ott leírtaknak megfelelően A így adható meg:

$$A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r), \tag{1}$$

amit egyszerűbb alakra hozva:

$$A = (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r). \tag{2}$$

Az A formulának (1) és (2) alakjai olyan szerepet töltenek be a kijelentéslogikában, mint a polinomok az algebrában. A-ban a főművelet a diszjunkció, e tagokban konjunkció szerepel, tehát az A formula: konjunkciók diszjunkciója (a polinom: szorzatok összege).

Az ilyen típusú formulákat **diszjunktív normálformák**nak nevezzük. Az (1) formula diszjunkciós tagjaiban konjunkciós tagként mind a három kijelentésvátltozó előfordul, mégpedig vagy negálva, vagy negálatlanul. Az ilyen formulákat **teljes diszjunktív normálformák**nak nevezzük; (2) **nem teljes diszjunktív normálforma**.

Dualizáljuk az (1) formula felírásánál ismertetett eljárásunkat:

$$C = (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \tag{3}$$

Egyszerűbb alakra hozás után ebből a

$$C = (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \tag{4}$$

formula adódik. (3) **teljes konjunktív normálforma**, (4) **nem teljes konjunktív normálforma.**

11.4. Kijelentéslogikai tautológiák. Az alábbiakban felsorolunk néhány ismert tautológiát, amelyek ellenőrzése a logikai értéktáblázatok elkészítésével történik. Figyeljük meg, hogy ezekből visszakapjuk a logikai alapműveletek tulajdonságait, illetve a klasszikus logika néhány alapelvét.

Tétel. Ha A, B, C tetszőleges logikai formulák, akkor
1) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asszociativitás),
2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (kommutativitás),
3) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ (abszorbció),
4) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (disztributivitás),
5) $A \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow A$, $A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$,
6) $A \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$, $A \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow 1$,
7) $A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (a harmadik kizárásának elve), $A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{0}$ (az ellentmondás elve),
8) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ (de Morgan képletek)
9) $A \wedge A \Leftrightarrow A$, $A \vee A \Leftrightarrow A$ (idempotencia),
10) $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (a kettős tagadás elve),
11) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,
12) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B$.
A következő tautológiák következtetéseknél használatosak (ezekre még visszatérünk):
13) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ (kontrapozició),
14) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$ (szillogizmus, a "szillogizmus" a hagyományos logika elnevezése, olyan következtetés, amelyben legalább két premissza van)
15) $(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (premisszák egyesítési és felbontási szabálya),
16) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$ (premisszák felcserélési szabálya),
17) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$ (reductio ad absurdum),
18) $A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$ (modus ponens),
19) $(\overline{A} \rightarrow B) \wedge (\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \Rightarrow A$ (indirekt bizonyítás módszere),
20) $((C \vee B) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A)) \Rightarrow A$ (esetek elemzése).

11.5. Kijelentéslogikai következtetések. A logika egyik fontos feladata a következtetések vizsgálata. A **következtetések** egy vagy több feltételből, más néven **premisszá**ból, és egy állításból, más néven következményből, vagy **konklúzió**ból állnak.

Nézzük először azt az esetet, amikor 1 premissza van. Azt mondjuk, hogy az A formulából **következik** a B formula (a B formula **következménye** az A formulának), ha az $A \rightarrow B$ formula tautológia. Jelölés: $A \Rightarrow B$ vagy $A \models B$. Ez akkor teljesül, ha minden olyan interpretáció, amely az A-t igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi.

Matematikai tételekben ez úgy szokott szerepelni, hogy: *ha A, akkor B; A elégséges feltétele B-nek; csak akkor A, ha B; B szükséges feltétele A-nak.* Például: "Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos."

Az "A-nak következménye B" tehát egy, a formulák körében értelmezett reláció, amelynek jelölése: $A \Rightarrow B$. Ugyanakkor az implikáció egy kijelentéslogikai művelet (amely a p és q adott kijelentésekből, illetve az A és B formulákból egy új kijelentést, illetve formulát képez, jelölés $p \rightarrow q$, $A \rightarrow B$).

Tétel. A formulákra vonatkozó $\models$ reláció
a) reflexív, azaz minden A formulára $A \models A$,
b) tranzitív, azaz minden A, B, C formulára ha $A \models B$ és $B \models C$, akkor $A \models C$,
c) nem szimmetrikus, azaz ha $A \models B$, akkor általában $B \models A$ nem teljesül,
d) minden A, B formulára ha $A \models B$ és $B \models A$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Bizonyítás. Feladat.

Általánosan, nézzük most azt, amikor több premissza van.

Példa.

(1) József Debrecenbe vagy Miskolcra utazik.
(2) József nem Miskolcra utazik.

---

(3) József Debrecenbe utazik.

A premisszák és a konklúzió közé vonalat szokás húzni. Ezt a következtetést helyesnek tartjuk, mert ha (1) és (2) igaz, akkor (3) szükségképpen igaz.

E következtetés szerkezete (**sémá**ja):

(1) $p \vee q$
(2) $\neg q$

---

(3) p

Ugyancsak helyesnek ítéljük mindazokat a következtetéseket, amelyek a fenti séma interpretációiként adódnak. Eszerint egy következtetés helyessége annak a szerkezetétől és nem a tartalmától függ.

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ premisszáknak **következménye** a B konklúzió (kijelentéslogikai értelemben), ha minden olyan interpretáció, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mindegyikét igazzá teszi, a B-t is igazzá teszi. Jelölés: $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, vagy $A_1, \ldots, A_n \models B$, vagy $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$.

E definíció alapján az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ premisszák helyettesíthetők az $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ formulával és a következtetési séma helyességére szükséges és elégséges feltételt ad a következő tétel.

Tétel. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formuláknak akkor és csak akkor következménye a B formula, ha $|(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B| \equiv 1$.

Tehát $n = 1$-re visszakapjuk a korábbi következményfogalmat.

Azt mondjuk, hogy egy következtetés **helyes**, ha a sémája helyes.

11.6. Következtetési sémák. Néhány egyszerű, gyakran előforduló következtetési séma (ezek a hagyományos - arisztotelészi - logika következtetési sémái) :

Tétel.

1. $$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$ leválasztási szabály (modus ponens) ;

2. $$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A}$$ az indirekt bizonyítás sémája (modus tollens) ;

3. $$\frac{A \to B \qquad A \to \neg B}{\neg A}$$ redukció ad abszurdum (a lehetetlenre való visszavezetés) sémája;

4. $$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$ kontrapoziciós következtetési séma;

5. $$\frac{A \vee B \qquad \neg B}{A}$$ diszjunktív szillogizmus (modus tollendo ponens);

6. $$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$ láncszabály vagy feltételes szillogizmus.

Bizonyítás. A definíció alapján, lásd az 5.7. szakaszt.
További tulajdonságok :

- Tautológiának csak tautológia lehet következménye.
- Tautológia bármilyen formulának következménye.
- Kontradikciónak bármilyen formula következménye.
- Kontradikció csak kontradikciónak lehet következménye.
- $A \Rightarrow A$ (reflexívitás)
- Ha $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_j$ (minden $j = 1, \ldots, m$ esetén) és $B_1, \ldots, B_m \Rightarrow C$, akkor $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$ (tranzitívitás).
- Ha $A_1 \Rightarrow A_2$, … ,$A_{n-1} \Rightarrow A_n$, és $A_n \Rightarrow A_1$, akkor $A_1, \ldots, A_n$ formulák ekvivalensek (ciklikus bizonyítás).

11.7. Következtetések vizsgálata. Az alábbiakban bemutatunk néhány, a következtetések helyességének eldöntésére alkalmas módszert.

1. Alkalmazzuk a definíciót, készítsünk értéktáblázatot (a példa legyen a diszjunktív szillogizmus):

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
i	i	i	h	i
i	h	i	i	i
h	i	i	h	h
h	h	h	i	h

A második sorban (és csak ebben) igaz mind a két premissza és e sorban igaz a konklúzió is, a következtetés tehát helyes.

2. Bizonyítsuk be a leválasztási szabály helyességét. A definíció helyett alkalmazhatjuk a fenti Tételt. Értéktáblázattal megmutatjuk, hogy $|((p \to q) \wedge p) \to q| \equiv 1$.

3. Tegyük fel, hogy létezik olyan interpretáció, amely a premisszákat igazzá, a konklúziót hamissá teszi. Ha ellentmondásra jutunk (azaz, ha nem létezik a feltételezett interpretáció), akkor a következtetés helyes; ha nem jutunk ellentmondásra (azaz, ha találunk ilyen interpretációt), akkor a következtetés helytelen. Példaként tekintsük a láncszabályt:

Ha $|p \to q| = 1$, $|q \to r| = 1$ és $|p \to r| = 0$, akkor ez utóbbiból $|p| = 1, |r| = 0$, ahonnan az első feltételből $|q| = 1$, a másodikból pedig $|q| = 0$, ami ellentmondás, tehát a következtetés helyes.

Sok esetben, például matematikai tételek bizonyításánál, az adott következtetési séma helyett vele ekvivalens sémák helyességét igazolhatjuk könnyebben. Aszerint, hogy milyen ekvivalens sémákat cserélünk ki, különböző bizonyítási módszerekről beszélhetünk. A megfelelő sémák ekvivalenciáját pl. táblázatok segítségével láthatjuk be.

(1) **Feltételes bizonyítás**ról beszélünk, amikor az $A \Rightarrow (B \to C)$ sémát a vele ekvivalens $A, B \Rightarrow C$ sémával helyettesítjük.
Valóban, ez táblázattal igazolható vagy a korábbi műveleti tulajdonságok szerint így:

$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C.$$

(2) **Kontrapozíciós bizonyítás**ról beszélünk, amikor az $A, B \Rightarrow C$ sémát a vele ekvivalens $A, \overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ sémával helyettesítjük.

Valóban, ez táblázattal igazolható vagy így:

$$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C) \vee \neg B \Leftrightarrow (A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B.$$

(3) **Indirekt bizonyítás** esetén az $A \Rightarrow B$ alakú séma helyett az $A \wedge \overline{B}$ formuláról mutatjuk meg, hogy kontradikció.

Igazoljuk ezt!

A kijelentéslogikában minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem, pl. a táblázat elkészítésével. Így kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

11.8. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha p, q tetszőleges kijelentések, akkor
i) $|p \wedge (q \vee r)| = |(p \wedge q) \vee (p \wedge r)|$ ii) $|(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)| = |p \leftrightarrow q|$.
2. Adjuk meg táblázattal mind a 16 kétváltozós logikai műveletet. Keressük meg közöttük a tanultakat.
3. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő formulákat:
i) $A = \neg(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ ii) $B = \neg((p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q)$.
4. Állapítsuk meg, hogy tautológiák-e a következő formulák:
$A_1 = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$, $A_2 = ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$.
5. Egy papiron az alábbi száz kijelentő mondat olvasható:
1. Ezen a papiron pontosan egy kijelentés hamis.
2. Ezen a papiron pontosan két kijelentés hamis.
....
100. Ezen a papiron pontosan száz kijelentés hamis.
(A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a száz kijelentő mondatot.)
Kijelentések-e a fenti kijelentő mondatok? Amennyiben igen, mi a logikai értékük?
Megoldás. Az adott mondatok egymásnak ellentmondanak, ezért ha kijelentések, akkor közülük legfeljebb egy lehet igaz. Ha 1. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond az 1. állításának. Ha 2. igaz, akkor a többi 99 hamis, ami ellentmond a 2. állításának, stb. Csak az lehetséges, hogy a 99. állítás igaz és a többi mind hamis.
6. Helyes-e az alábbi következtetés ?
$(p \wedge q) \leftrightarrow r$
$r \leftrightarrow s$
$\neg(p \rightarrow s)$

$q \rightarrow s$
7. Helyes-e az alábbi következtetés ?
(1) Ha a motor működik, akkor – amennyiben az akkumulátor nincs kimerülve – a jelzőlámpa ég.
(2) Ha az akkumulátor kimerült, akkor a motor nem működik.
(3) Ha a jelzőlámpa ég, akkor a motor működik.

Ha az akkumulátor nincs kimerülve, akkor a motor működik és a jelzőlámpa ég.

8. Adjunk meg egy olyan A logikai formulát, melynek értéktáblázata:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

11.9. Durvaszerkezet és finomszerkezet. Tekintsük az alábbi következtetést:

A_1: A paralelogramma átlói felezik egymást.
A_2: A négyzet paralelogramma.

B: A négyzet átlói felezik egymást.

Írjuk fel ennek a sémáját. Az A_1, A_2, B állításokat nem tudjuk felbontani a kijelentéslogika műveletei szerint és a séma a következő :

$A_1 : p$
$A_2 : q$

$B : r$
Ez helytelen következtetés a kijelentéslogikában tanultak szerint, mert p, q, r egymástól függetlenek és vehető $|p| = 1, |q| = 1, |r| = 0$.

Ugyanakkor ezt a következtetést helyesnek érezzük. A magyarázat az, hogy a kijelentéslogika nem alkalmas az ilyen és hasonló következtetések vizsgálatára.

A kijelentéslogika a kijelentések, állítások ún. **durvaszerkezet**ét tárja fel, ezt vizsgálja, a predikátumlogika pedig az ún. **finomszerkezet**ét a predikátumok és a logikai kvantorok (lásd 1. fejezet) használatával. A lényeges különbség tehát az, hogy a kijelentéslogikában nem szerepelnek predikátumok és logikai kvantorok, a predikátumlogikában viszont igen.

Látni fogjuk, hogy a predikátumlogikában a fenti következtetés helyessé válik.

Egy kijelentés **predikátumlogikai formalizálás**án a kijelentés szerkezetének (finomszerkezetének) felírását értjük, elemi (tovább már nem bontható) kijelentések, kvantorok és predikátumlogikai műveletek segítségével.

Példa. A fenti kijelentések így formalizálhatók: tekintsük a következő egyváltozós predikátumokat a síkbeli x négyszögek halmazán,

$P(x)$: "x paralelogramma."
$F(x)$: "x átlói felezik egymást."
$N(x)$: "x négyzet."
Ekkor
$A_1 : \forall x(P(x) \to F(x))$
$A_2 : \forall x(N(x) \to P(x))$
$B : \forall x(N(x) \to F(x))$

Más példák. i) "A 4 osztja a 12-t." kijelentés elemi, azaz felbonthatatlan a kijelentéslogikában. Azonban a természetes számok oszthatósági fogalmát ismerve így is átfogalmazható: "Létezik olyan x természetes szám, hogy $4x = 12$". Vagyis a finomszerkezete $\exists x\ P(x)$, ahol $P(x)$: "$4x = 12$" egy 1-változós predikátum az $\mathbb{N}$ halmazon.

ii) ”Minden szabályos sokszög húrsokszög, de van olyan húrsokszög, amely nem szabályos sokszög.”

A kijelentést először átfogalmazzuk: ”Minden sokszögre igaz az, hogy ha szabályos sokszög, akkor húrsokszög, és van olyan sokszög, amely húrsokszög és nem szabályos sokszög.” Legyen: $Hx := x$ húrsokszög, $Sx := x$ szabályos sokszög, ahol az individuumtartomány a sokszögek halmaza. Kapjuk, hogy:

$$\forall x(Sx \to Hx) \land \exists x(Hx \land \neg Sx).$$

iii) Az ”Antal tanul” kijelentés finomszerkezete: $Q(a)$, ahol $Q(x)$: ”x tanul” egy 1-változós predikátum személyek egy S halmazán. Itt Antal egy **individuum**, ennek jelölése a.

11.10. Predikátumlogikai formulák. A **predikátumlogikai formulá**k a következőképpen adhatók meg:

1. a kijelentésváltozók formulák,
2. ha P egy n-változós predikátum és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ individuumváltozók vagy individuumnevek, akkor $Px_1x_2 \ldots x_n$ és $x_1 \equiv x_2$ formulák,
3. ha A és B formulák, akkor $\neg A$, $A \land B$, $A \lor B$, $A \to B$ és $A \leftrightarrow B$ is formulák,
4. ha A egy formula és x egy individuumváltozó, akkor $\forall xA$ és $\exists xA$ is formulák,
5. más jelsorozat nem formula.

Itt $x_1 \equiv x_2$, olvasd ”x_1 azonos x_2-vel” az **azonosságpredikátum**, amely egy 2-változós predikátum, de ennek kitüntetett szerepe van.

Figyeljük meg, hogy a 2. és 4. pontok elhagyásával a kijelentéslogikai formula definíciója adódik.

Ilyen formula például

$$A = \forall x(Sx \to Hx) \land \exists x(Hx \land \neg Sx),$$

lásd a fenti ii) Példát.

Most nézzük a **predikátumlogikai interpretáció**t. Adjuk meg például a

$$B = (Pa \land \neg Qa) \to \exists x(Px \land \neg Qx)$$

formulának egy interpretációját. Legyen az individuumtartomány a valós számsorozatok $\mathcal{S}$ halmaza. A Px és Qx predikátumváltozóknak konkrét predikátumokat feleltetünk meg: Px-nek az ”x korlátos sorozat”, Qx-nek az ”x konvergens sorozat” predikátumokat, az a-hoz pedig $\mathcal{S}$-nek az $a_n = (-1)^n$ elemét rendeljük. Ezek után a formula egy szöveges interpretációja így hangzik: ”Ha az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens, akkor létezik olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens.”

E példából is kiderül, hogy egy predikátumlogikai formula interpretálása lényegesen bonyolultabb egy kijelentéslogikai formula interpretálásánál. Az individuumtartomány különféle megválasztása, a predikátumváltozók jelentésének megadása más-más interpretációt eredményez.

11.11. Következtetések a predikátumlogikában

A predikátumlogika következményrelációjának definíciója azonos a kijelentéslogikában kimondott definícióval, de itt formulán predikátumlogikai formulát, interpretáción pedig predikátumlogikai interpretációt kell érteni.

Példák. I.
(1) Minden differenciálható függvény folytonos.
(2) Az $x \to [x]$ függvény nem folytonos.

---

(3) Az $x \to [x]$ függvény nem differenciálható.

Egy alkalmas individuumtartomány: $I :=${valós függvények }. A predikátumokra és az individuumra jelöléseket vezetünk be, majd felírjuk a következtetés sémáját.

$Dx := x$ differenciálható (1) $\forall x(Dx \to Fx)$
$Fx := x$ folytonos (2) $\neg Fe$
$e := x \to [x]$ (3) $\neg De$

Tekintsük mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazzá teszik:

(1) $|\forall x(Dx \to Fx)| = 1$
(2) $|\neg Fe| = 1$.

Belátjuk, hogy ezek az interpretációk igazzá teszik a konklúziót is. (1)-ből $|De \to Fe| = 1$, (2)-ből $|Fe| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|De| = 0$, ahonnan $|\neg De| = 1$. Tehát a következtetés helyes.

II. Tekintsük a fejezet elején megadott
$A_1 : \forall x(P(x) \to F(x))$
$A_2 : \forall x(N(x) \to P(x))$

$B : \forall x(N(x) \to F(x))$
következtetést.

Tegyük fel, hogy az A_1, A_2 premisszák igazak és a B konklúzió hamis. Akkor $|\forall x(N(x) \to F(x))| = 0$, innen $|\neg\forall x(N(x) \to F(x))| = 1$, $|\exists x\neg(N(x) \to F(x))| = 1$ és legyen a olyan, hogy $|\neg(N(a) \to F(a))| = 1$, azaz $|N(a) \to F(a)| = 0$, innen $|N(a)| = 1$, $|F(a)| = 0$.

Akkor erre az a individuumra $|P(a) \to F(a)| = 1$, $|(N(a) \to P(a)| = 1$ és kapjuk, hogy $|P(a)| = 0$, ugyanakkor $|P(a)| = 1$, ami ellentmondás. Tehát a következtetés helyes.

III. Helyes-e az alábbi következtetés ?
(1) Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.
(2) Az $n = 13$ szám páratlan.

---

(3) Az $n = 13$ szám prímszám.

Itt a (3) konklúzió persze igaz, de az a kérdés, hogy (3) következménye-e (1)-nek és (2)-nek. Legyen az individuumtartomány $I = \{3, 4, 5, ...\}$, $a = 13$ és $P(x)$: "x prím", $Q(x)$: "x páratlan". Ekkor a séma:
$A_1 : \forall x(P(x) \to Q(x))$
$A_2 : Q(a)$

$B : P(a)$

Ez a következtetés nem helyes, mert más interpretáció esetén a konklúzió hamissá válhat. Pl. $a = 15$-re a konklúzió hamis.

A predikátumlogikai következtetések vizsgálatánál hasznos a szóban forgó predikátumok igazsághalmazainak ábrázolása Venn-diagramok segítségével.

Említettük, hogy a kijelentéslogikában minden következtetésről is eldönthető véges sok lépésben, hogy helyes-e vagy sem.

A predikátumlogikában más a helyzet. A. Church, 1936-os nevezetes eredménye szerint nem lehet olyan egységes, általános eljárást adni, amelynek segítségével minden formuláról eldönthető véges sok lépésben, hogy tautológia-e vagy sem. Predikátumlogikában nem lehet általános eldöntési eljárást adni.

11.12. Feladatok

1. A $Kxy := x$ kezet fogott y-nal predikátum és az azonosságpredikátum felhasználásával formalizáljuk az alábbi logikai függvényeket ill. kijelentéseket:
a) x kezet fogott mindenki mással.
b) Mindenki mindenki mással kezet fogott.
c) Valaki mindenki mással kezet fogott.
d) Mindenki kezet fogott valaki mással.
e) Valaki valaki mással kezet fogott.

2. Formalizáljuk a következő kijelentéseket:
a) Bármely konvergens sorozat korlátos.
b) A korlátos monoton sorozatok konvergensek.
c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
d) A 0-ra végződő számok párosak.

3. A vizsgaidőszak valamely időpontjban aktuálissá válnak a következő kijelentéspárok:
a) Mindenki vizsgázott analízisből és algebrából.
Mindenki vizsgzott analízisből, és mindenki algebrából is.
b) Mindenki vizsgázott analízisből vagy algebrából.
Mindenki vizsgzott analízisből, vagy mindenki algebrából.
c) Vannak, akik analízisből is, algebrából is vizsgáztak.
Vannak, akik analízisből, s vannak akik algebrából vizsgáztak.
Formalizáljuk a kijelentéseket. Melyek azok a kijelentéspárok, amelyek ekvivalensek? A nem ekvivalenseket írjuk fel implikációval!

4. Helyes-e az alábbi következtetés ?
(1) Minden konvergens sorozat korlátos.
(2) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem korlátos.

---

(3) Az $a_n = 2^n$ sorozat nem konvergens.

Megoldás. A következtetés sémája:
(1) $\forall x : (C(x) \to B(x))$
(2) $\neg B(e)$

---

(3) $\neg C(e)$

Ez a következtetés helyes. Tekintsük ugyanis mindazokat az interpretációkat, amelyek mindkét premisszát igazzá teszik:

(1) $|\forall x : (C(x) \to B(x))| = 1$
(2) $|\neg B(e)| = 1.$

(1)-ből $|C(e) \to B(e)| = 1$, (2)-ből $|B(e)| = 0$ következik. Hamis utótagú implikáció akkor és csak akkor igaz, ha előtagja hamis: $|C(e)| = 0$, ahonnan $|\neg C(e)| = 1$.

5. Helyes-e az alábbi következtetés ?
(1)Minden differenciálható függvény folytonos.
(2) Van olyan racionális törtfüggvény, amely differenciálható.

---

(3) Van olyan racionális törtfüggvény, amely folytonos.

12. HÁLÓK

12.1. A háló, mint relációs struktúra és mint algebrai struktúra

Az 5. fejezetben már definiáltuk a háló, mint relációs struktúra fogalmát. Hálónak nevezzük a következő algebrai struktúrát is, a megegyező elnevezést a 12.2. Tétel indokolja, amelyet a értelmezés és a példák után adunk meg.

Legyen $(A, \wedge, \vee)$ egy algebrai struktúra, ahol $\wedge$ és $\vee$ bináris műveletek és tegyük fel, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:

(1) $(A, \wedge)$ és $(A, \vee)$ kommutatív félcsoportok, azaz mindkét művelet asszociatív és kommutatív,

(2) minden $x, y \in A$ esetén: $x \wedge (x \vee y) = x$ és $x \vee (x \wedge y) = x$ (**elnyelési** vagy **abszorbciós** tulajdonságok).

Ekkor az $(A, \wedge, \vee)$ struktúrát **háló**nak nevezzük, amely **egységelemes háló**, ha az $\wedge$ műveletre nézve létezik egy 1-gyel jelölt semleges elem (egységelem): $x \wedge 1 = x$ minden $x \in A$-ra. $(A, \wedge, \vee)$ **zéruselemes háló**, ha a $\vee$ műveletre nézve létezik egy 0-val jelölt semleges elem: $x \vee 0 = x$ minden x-re.

Ha $(A, \wedge, \vee)$ és $(A', \wedge, \vee)$ hálók, akkor $f\colon A \to A'$ **hálómorfizmus**, ha minden $a, b \in A$ esetén

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Példák. 1) $(\mathbb{N}, \wedge, \vee)$ zéruselemes és nem egységelemes háló, ahol $x \wedge y = (x, y)$, az x és y legnagyobb közös osztója, $x \vee y = [x, y]$ pedig az x és y legkisebb közös többszöröse. A zéruselem az 1 szám: $x \vee 1 = [x, 1] = x$ minden x-re.

2) Ha M egy halmaz, akkor $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol $\cap$ és $\cup$ a halmazokra vonatkozó metszet és egyesítési műveletek. A zéruselem az üres halmaz, az egységelem pedig az M.

3) $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol 0 és 1 a logikai értékeket jelöli, $\wedge$ és $\vee$ pedig a logikai konjunkció, illetve diszjunkció műveletek.

4) $(\mathrm{Pred}\, A, \wedge, \vee)$ zéruselemes és egységelemes háló, ahol $\mathrm{Pred}\, A$ az halmazon értelmezett egyváltozós predikátumok (azaz $P : A \to \{0, 1\}$ függvények, itt 0 és 1 a logikai értékek) halmaza , $\wedge$ és $\vee$ pedig a predikátumok konjunkciója, illetve diszjunkciója.

12.1. Tétel. Ha az $(A, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra háló, akkor

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a. \tag{1}$$

Bizonyítás. Valóban, az elnyelési tulajdonság szerint, $a \vee b = b \Longrightarrow a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$, továbbá: $a \wedge b = a \Longrightarrow b = b \vee (b \wedge a) = b \vee (a \wedge b) = b \vee a = a \vee b$. □

12.2. Tétel. a) Ha az $(A, \leq)$ rendezett halmaz háló, akkor az

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \qquad a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad \forall a, b \in A$$

előírások bináris műveleteket értelmeznek az A halmazon és az $(A, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra háló.

b) Fordítva, ha az $(A, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra háló, akkor az

$$a \leq b \iff a \wedge b = a, \quad \forall a, b \in A$$

előírás egy relációt értelmez az A halmazon, az $(A, \leq)$ struktúra háló és minden $a, b \in A$ esetén

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Bizonyítás. a) Az $\wedge$ és $\vee$ műveletek kommutativitása azonnali az értelmezésből. Igazoljuk a $\vee$ művelet asszociativitását: legyen $x = (a \vee b) \vee c, y = a \vee (b \vee c)$. Írható, hogy $a \vee b \leq x, c \leq x \Longrightarrow a \leq x, b \leq x, c \leq x \Longrightarrow a \leq x, b \vee c \leq x \Longrightarrow a \vee (b \vee c) \leq x$, ahonnan $y \leq x$. Hasonlóan kapjuk, hogy $x \leq y$, és így $x = y$.

Legyen most $v = a \vee (a \wedge b)$. Innen $a \leq v$, másrészt $a \wedge b \leq a, a \leq a \Longrightarrow a \vee (a \wedge b) \leq a \Longrightarrow v \leq a \Longrightarrow v = a$.

b) Most igazoljuk, hogy $\leq$ rendezési reláció: az elnyelési tulajdonság szerint minden a-ra $a = a \wedge (a \vee a)$ és $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$, ahonnan $a \leq a$, ami a reflexivitást igazolja.

Az antiszimmetria: legyen $a \leq b, b \leq a$. Kapjuk, hogy $a \vee b = b, b \vee a = a \Longrightarrow a = b$.

A tranzitivitás: $a, b, c \in A : a \leq b, b \leq c \Longrightarrow a \vee b = b, b \vee c = c \Longrightarrow a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c \Longrightarrow a \leq c$.

Most megmutatjuk, hogy $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Írható, hogy $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \Longrightarrow a \leq a \vee b$ és hasonlóan $b \leq a \vee b$, tehát $a \vee b$ felső korlátja a-nak és b-nek. Ha c egy tetszőleges felső korlát, azaz $a \leq c, b \leq c$, akkor $a \vee c = c, b \vee c = c \Longrightarrow (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c \Longrightarrow a \vee b \leq c \Longrightarrow a \vee b$ a legkisebb felső korlát.

Az $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ összefüggés következik az (1) dualitási reláció szerint. $\square$

Az $(A, \wedge, \vee)$ hálót **disztributív hálónak** nevezzük, ha minden $a, b, c \in A$ esetén

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Az $(A, \wedge, \vee)$ hálót **moduláris hálónak** nevezzük, ha minden $a, b, c \in A$ esetén

$$a \leq c \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Megjegyzések. 1) Igazolható, hogy az $(A, \wedge, \vee)$ háló akkor és csak akkor disztributív, ha minden $a, b, c \in A$ esetén $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

2) A fenti 1)-4) Példákban szereplő hálók disztributívak.

3) Azonnali, hogy minden disztributív háló moduláris, valóban minden $a, b, c \in A, a \leq c$ esetén $a \vee c = c$ és $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$.

A fordított állítás nem igaz, léteznek moduláris, nem disztributív hálók, például csoportok normális részcsoportjainak hálója.

12.2. Boole-hálók

Az A háló **Boole-háló** (vagy **Boole-algebra**), ha A disztributív, létezik $0 = \min A$ legkisebb elem, létezik $1 = \max A$ legnagyobb elem és minden $a \in A$ esetén létezik $a' \in A$ úgy, hogy $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$. Jelölés: $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$.

12.3. Tétel. Ha A Boole-háló, akkor

a) Minden $a \in A$ esetén létezik egyetlen $a' \in A$ úgy, hogy $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$. Az a' elemet az a **komplementum**ának nevezzük.

b) $0' = 1, \quad 1' = 0, \quad (a')' = a$,

c) Minden $a, b \in A$ esetén,

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \qquad (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

(de Morgan képletek).

Bizonyítás. a) Ha $a \vee a' = a \vee \bar{a} = 1$ és $a \wedge a' = a \wedge \bar{a} = 0$, akkor $a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge \bar{a}) = (a' \vee a) \wedge (a' \vee \bar{a}) = (\bar{a} \vee a) \wedge (a' \vee \bar{a}) = \bar{a} \vee (a \wedge a') = \bar{a} \vee 0 = \bar{a}$.

b) $0 \vee 1 = 1, \quad 0 \wedge 1 = 0$, tehát $0' = 1$ és $1' = 0$. $a' \wedge a = 0, a' \vee a = 1$, tehát $(a')' = a$.

c) $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b') = (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$ és $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b') = 0 \vee 0 = 0$, tehát $(a \vee b)' = a' \wedge b'$; hasonló módon igazoljuk, hogy $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. □

Például $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ Boole-háló és $X \subseteq M$ komplementuma az X-nek M-re vonatkozó kiegészítő halmaza: $\complement_M X$.

Az $(A, +, \cdot)$ asszociatív egységelemes gyűrűt **Boole-gyűrűnek** nevezzük, ha $x^2 = x$ minden $x \in A$ esetén.

12.4. Tétel. Ha $(A, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, akkor

a) $1 + 1 = 0$ (tehát $x + x = 0$ minden $x \in A$ esetén).

b) A kommutatív.

Bizonyítás. a) $1 + 1 = (1 + 1)^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, tehát $1 + 1 = 0$.

b) Ha $x, y \in A$, akkor $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y + xy + yx$, tehát $xy = -yx$; mivel $1 = -1$, következik, hogy $xy = yx$. □

A következő tétel azt mutatja, hogy a Boole-háló és a Boole-gyűrű fogalmak egyenértékűek.

12.5. Tétel. (Stone-tétel) a) Legyen $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ egy Boole-háló és definiáljuk a következő műveleteket:

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$
$$a \cdot b = a \wedge b.$$

Ekkor $(A, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, amelynek zérusa 0 és egységeleme 1.

b) Legyen $(A, +, \cdot, 0, 1)$ egy Boole-gyűrű, és definiáljuk a következő műveleteket:

$$a \vee b = a + b + ab, \qquad a \wedge b = ab.$$

Ekkor $(A, \vee, \cdot)$ Boole-háló amelyben $a' = 1 + a$, $\min A = 0$ és $\max A = 1$.

c) Az a) és b) pontokban értelmezett megfeleltetések egymásnak inverzei.

Bizonyítás. a) Megjegyezzük, hogy

$$(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (a \vee b) \wedge (a' \vee b'),$$

tehát $a + b$ így is megadható. Valóban, a disztributivitás alapján $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (a \vee (a' \wedge b)) \wedge (b' \vee (a' \wedge b)) = (a \vee a') \wedge (a \vee b) \wedge (b' \vee a') \wedge (b' \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) \wedge (b' \vee a') \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (a' \vee b')$.

Evidens, hogy "+" kommutatív. Ha $a, b, c \in A$, akkor

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a \wedge (b + c)') \vee (a' \wedge (b + c)) \\
&= (a \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c'))') \vee (a' \wedge ((b \wedge c') \vee (b' \wedge c'))) \\
&= (a \wedge (b \wedge c')' \wedge (b' \wedge c)') \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \\
&= (a \wedge (b' \vee c) \wedge (b \vee c')) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) \\
&= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c).
\end{aligned}$$

Következik, hogy $(a + b) + c = c + (a + b) = a + (b + c)$; továbbá

$$a + 0 = (a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = a \vee 0 = a$$
$$a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = 0 \vee 0 = 0,$$

tehát $-a = a$ minden $a \in A$ esetén.

A "·" művelet kommutatív és asszociatív, $a \cdot 1 = a \wedge 1 = a$, $a^2 = a \wedge a = a$, és végül ellenőrizzük a disztributivitást:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= a \wedge ((b' \wedge c) \vee (b \wedge c')) \\ &= (a \wedge b' \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c'); \\ ab + ac &= ((a \wedge b) \wedge (a \wedge c)') \vee ((a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)) \\ &= (ab \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge a \wedge c) \\ &= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge a \wedge c) \vee (b' \wedge a \wedge c) \\ &= (a \wedge b \wedge c') \vee (b' \wedge a \wedge c); \end{aligned}$$

következik, hogy $(A, +, \cdot, 0, 1)$ Boole-gyűrű.

b) Könnyen belátható, hogy "$\vee$" és "$\wedge$" kommutatív és asszociatív műveletek, érvényesek a disztributív és abszorbció tulajdonságok, és minden $a \in A$ esetén $a \vee 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$; $a \wedge 1 = a \cdot 1 = a$; $a \wedge (1+a) = a(1+a) = a + a^2 = a + a = 0$ és $a \vee (1+a) = a + 1 + a + a(1+a) = 1 + a + a^2 = 1$.

c) Legyen $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ egy Boole-háló, $(A, +, \cdot, 0, 1)$ a megfelelő Boole-gyűrű, és legyen $a \cup b = a + b + ab$, $\ a \cap b = a \cdot b$, $\ \bar{a} = a + 1$. Ekkor igazolható, hogy $a \cup b = a \vee b$, $a \cap b = a \wedge b$ és $a' = \bar{a}$.

Fordítva, legyen $(A, +, \cdot, 0, 1)$ egy Boole-gyűrű, $(A, \vee, \wedge, 0, 1, ')$ a megfelelő Boole-háló, és legyen $a \oplus b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$, $\ a \odot b = a \wedge b$. Ekkor $a \oplus b = a + b$ és $a \odot b = ab$. $\square$

Példák. 1) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ Boole-gyűrű, és a megfelelő Boole-háló műveletek

$\vee$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$

$\wedge$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

$'$	
$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$

Ezek éppen a logikai diszjunkció, konjunkció és negáció műveletek.

2) A $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \emptyset, M, \complement)$ Boole-hálónak megfelel a $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ Boole-gyűrű, ahol $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ az A és B szimmetrikus különbsége.

12.3. Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy:

a) Az $(A, \wedge, \vee)$ hálóban $a \leq a'$, $b \leq b' \Longrightarrow a \vee b \leq a' \vee b'$ és $a \wedge b \leq a' \wedge b'$.

b) Az $(A, \wedge, \vee)$ háló akkor és csak akkor disztributív, ha minden $a, b, c \in A$ esetén $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

c) Ha A disztributív, akkor $\forall a, b, c \in A$, $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c \Longrightarrow a = b$.

d) Ha A moduláris, akkor $\forall a, b, c \in A$, $a \leq b$, $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c \Longrightarrow a = b$.

2. Igazoljuk, hogy:

a) $(\mathbb{N}, |)$ disztributív háló.

b) Ha $(A, \leq)$ teljesen rendezett, akkor A disztributív háló.

3. Ha M egy halmaz, akkor $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ disztributív háló.

4. a) Egészítsük ki a Stone-tétel bizonyítását.

b) Ha A Boole-háló és $a, b \in A$, akkor $a \leq b \Longleftrightarrow b' \leq a' \Longleftrightarrow a \wedge b' = 0 \Longleftrightarrow a' \vee b = 1$.

Tartalomjegyzék